مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

# مذكرة رقم 2 في درس نهاية متتالية

**مذكرة رقم : 2**
**الأستاذ : عثماني نجيب**

**الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :**

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| - المتتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$ وتمثيلها مبيانيا؛<br>- نهايات المتتاليات المرجعية: $(n)_{n\geq 0}$ و $(n^2)_{n\geq 0}$ و $(n^3)_{n\geq 0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ و $(n^p)_{n\geq 0}$ حيث $p$ عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛<br>- نهايات المتتاليات المرجعية: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 0}$ حيث $p$ عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛<br>- نهاية متتالية هندسية $(a^n)$ حيث $a\in\mathbb{R}$.<br>- العمليات على النهايات؛ | - استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$؛<br>- استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهايات متتاليات عددية؛ | - نقبل أن المتتاليات $(n)_{n\geq 0}$ و $(n^2)_{n\geq 0}$ و $(n^3)_{n\geq 0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ و $(n^p)_{n\geq 0}$ حيث $p$ عدد صحيح طبيعي أكبر من 3 تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $n$ إلى $+\infty$ وأن المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 0}$ حيث $p$ عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، تؤول إلى 0 عندما يؤول $n$ إلى $+\infty$ اعتبارا لكون المتتالية العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية؛<br>- جميع النهايات الواردة في محتوى البرنامج تعتبر نهايات مرجعية؛<br>- تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛<br>- إن أي دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج |

## I.متتاليات مرجعية نهايتها $+\infty$

**نشاط:** أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^7$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}9x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{8}x^4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^6$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}7\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^7$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-6\sqrt{x}$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ فإننا نحصل على نتائج مشابهة :

**خاصية1 :**

المتتاليات المرجعية : $(n)$ و $(n^2)$ و $(n^3)$ و $(\sqrt{n})$ و $(n^p)$ حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq 4$ تؤول الى $+\infty$ عندما تؤول $n$ الى $+\infty$

ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}n^p=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$

**خاصية2 :**

إذا كانت $(u_n)$ متتالية مرجعية نهايتها $+\infty$ فان المتتالية $(-u_n)$ تؤول الى $-\infty$

## II.متتاليات مرجعية نهايتها 0

**خاصية:** المتتاليات المرجعية : $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq 4$ تؤول الى 0 عندما تؤول $n$ الى $+\infty$

ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

**تمرين1** : أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n^3}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}-3n^5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}2n^9$

**أجوبة:** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n^3}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}-3n^5=-\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6=-\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}2n^9=+\infty$


للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

## I. متتاليات نهايتها عدد

**مثال :** أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

**أجوبة:** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3=0+3=3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7=0-7=-7$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5=0+5=5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}=0$

**ملاحظات :**

- كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة
- كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

## II. نهاية المتتالية $(a^n)$

**خاصية:** ليكن $a$ عددا حقيقيا

1. إذا كان : $a>1$ فان : $(a^n)$ تؤول إلى $+\infty$
2. إذا كان : $a=1$ فان : $(a^n)$ تؤول إلى 1
3. إذا كان : $-1<a<1$ فان : $(a^n)$ تؤول إلى 0
4. إذا كان : $a\le -1$ فان : المتتالية $(a^n)$ ليست لها نهاية

**أمثلة :** أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n$ , $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ , $\lim\limits_{n\to+\infty}(-5)^n$

**أجوبة:** : $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ لأن: $a=2>1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن : $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$(-5)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-5<-1$

**تمرين2 :** أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,7)^n$ , $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$ , $\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}$ , $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2)^n$ , $\lim\limits_{n\to+\infty}(4)^{-n}$ , $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}$ ,

**أجوبة:** : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0.7)^n=0$ لأن : $-1<a=0.7<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2}^n=+\infty$ لأن: $a=\sqrt{2}>1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}=+\infty-0=+\infty$

$(-2)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-2<-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(4)^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(4)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن : $-1<a=\frac{1}{4}<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ لأن: $a=\frac{5}{4}>1$

## III. العمليات على النهايات

لتكن $(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتين عدديتين و $l$ و $l'$ أعدادا حقيقية نقبل أن العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

### 1. الجمع و الضرب

| $\lim u_n$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n$ | $l'$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim(u_n+v_n)$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ش غ م |

| $\lim u_n$ | $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n$ | $l'$ | $l>0$ | $l<0$ | $l>0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| $\lim(u_n\times v_n)$ | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ش غ م |

### 2. المقلوب و الخارج:

| $\lim u_n$ | $l\neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\frac{1}{u}$ | $\frac{1}{l}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ |


للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

| $\lim u_n$ | $l$ | $l\prec 0$ | $l\succ 0$ | $-\infty$ | $l\prec 0$ | $l$ | $\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim v_n$ | $l'\neq 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $l\prec 0$ | $-\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim \frac{u_n}{v_n}$ | $\frac{l}{l'}$ | $0^-$ | $0^-$ | $+\infty$ | $0^+$ | $0$ | شغم | شغم |

**أمثلة** : أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1$ 2) $\lim_{n\to+\infty} \left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$ ، 4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$

5) $\lim_{n\to+\infty} n^2-n$ 6) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n$

**أجوبة**:1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1 = 0-0+0-1=-1$ لأن: $-1<a=\frac{2}{3}<1$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}=0$

2) $\lim_{n\to+\infty} \left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = (-3+0)(1+0) = (-3)(1) = -3$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}=0$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{4}{3}$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2}=0$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}=0$

5) $\lim_{n\to+\infty} n^2-n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

4) $\lim_{n\to+\infty} n^2-n = \lim_{n\to+\infty} n(n-1) = +\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ و $-1<a=\frac{2}{3}<1$ $+\infty\times+\infty=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(3)^n}{(2)^n} + \frac{(2)^n}{(2)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1 = +\infty+1=+\infty$

6) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1-2\sqrt{n}\right) = -\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} \left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$ و $+\infty\times-\infty=-\infty$

**ملاحظة :**

- ❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- ❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

**تمرين3** : أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}$ 2) $\lim_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1$ 3) $\lim_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9$ 4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{9n-3}{3n+5}$

5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1}$ 6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$ 7) $\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$ 8) $\lim_{n\to+\infty} (n+1)^2-(n-1)^2$

**أجوبة**: 1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}} = \frac{5}{3}$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2}=0$

2) $\lim_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1 = \lim_{n\to+\infty} 4n^3 = +\infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

3) $\lim_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9 = \lim_{n\to+\infty} -2n^5 = \infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{9n-3}{3n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{9n}{3n} = \frac{9}{3} = 3$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\times2\times n\times n}{3n} = \lim_{n\to+\infty} 2\times n = +\infty$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة

6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

7) $\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2}{14n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n\times n}{14n\times n\times n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$

8) $\lim_{n\to+\infty} (n+1)^2-(n-1)^2$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} (n+1)^2-(n-1)^2 = \lim_{n\to+\infty} n^2+2n+1-\left(n^2-2n+1\right) = \lim_{n\to+\infty} 4n = +\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

**تمرين4** : محلول في دفتر الدروس :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=5u_n+8\\u_0=4\end{cases}$ ونعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+2$

1. أحسب $u_1$ و $v_0$ و $v_1$
2. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها : 5
3. أكتب $v_n$ بدلالة $n$
4. استنتج $u_n$ بدلالة $n$
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

الجواب: 1) نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1}=5\times u_0+8=5\times4+8=28$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+2=4+2=6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+2=28+2=30$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+2}{u_n+2}=\frac{5u_n+8+2}{u_n+2}=\frac{5u_n+10}{u_n+2}=\frac{5(u_n+2)}{u_n+2}=5=q$

اذن: المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $v_0=6$

3) كتابة $v_n$ بدلالة $n$

بما أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $v_0$

فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=6\times(5)^n$

استنتاج $u_n$ بدلالة $n$

4) لدينا: $v_n=u_n+2$ اذن: $u_n=v_n-2$ أي: $u_n=6\times(5)^n-2$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}6\times(5)^n=+\infty$ : لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(5)^n=0$ $\quad 1<q=5$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}6\times(5)^n-2=+\infty$

**تمرين5** : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+2\\u_0=-1\end{cases}$ ونعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة كالتالي : $v_n=u_n-\frac{8}{3}$

1. أحسب $u_1$ و $v_0$ و $v_1$
2. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$
3. أكتب $v_n$ بدلالة $n$
4. استنتج $u_n$ بدلالة $n$
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

الأجوبة 1) نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{4}\times u_0+2=\frac{1}{4}\times(-1)+2=-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4}$ اذن : $u_1=\frac{7}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-\frac{8}{3}=-1-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}$ و نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{19}{3}$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-\frac{8}{3}}{u_n-\frac{8}{3}}=\frac{\frac{1}{4}u_n+2-\frac{8}{3}}{u_n-\frac{8}{3}}=\frac{\frac{1}{4}u_n-\frac{2}{3}}{u_n-\frac{8}{3}}=\frac{\frac{1}{4}\left(u_n-\frac{8}{3}\right)}{u_n-\frac{8}{3}}=\frac{1}{4}=q$ اذن: المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=-\frac{11}{3}$

3) كتابة $v_n$ بدلالة $n$ :بما أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0$ فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) استنتاج $u_n$ بدلالة $n$ لدينا: $v_n=u_n-\frac{8}{3}$ اذن: $v_n+\frac{8}{3}=u_n$ أي: $u_n=-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{8}{3}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ $\quad -1<a=\frac{1}{4}<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

**تمرين6** : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+5 \\ u_0=4 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة كالتالي : $v_n=u_n-10$

1. أحسب $u_1$ و $u_2$ و $v_0$ و $v_1$
2. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب $v_n$ بدلالة $n$ و استنتج $u_n$ بدلالة $n$
4. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الجواب: نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{2}\times u_0+5=\frac{1}{2}\times 4+5=2+5=7$ اذن : $u_1=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=\frac{1}{2}\times u_1+5=\frac{1}{2}\times 7+5=\frac{7}{2}+\frac{10}{2}=\frac{17}{2}$ اذن : $u_2=\frac{17}{2}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-10=4-10=-6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-10=7-10=-3$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-10}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}u_n+5-10}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}u_n-5}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}u_n-\frac{10}{2}}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}(u_n-10)}{u_n-10}=\frac{1}{2}=q$

اذن: المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=-6$

3) كتابة $v_n$ بدلالة $n$

بما أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=-6$ فان: $v_n=(-6)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج $u_n$ بدلالة $n$ : لدينا: $v_n=u_n-10$ اذن: $u_n=v_n+10$ أي: $u_n=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+10$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ : لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ولأن $-1<a=\frac{1}{2}<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+10=0+10=10$



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com