مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

أكاديمية الجهة الشرقية

المادة: الرياضيات

# تمارين بحلول في درس نهاية متتالية

**تمرين1 :** أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{n^3}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$ و $\lim_{n\to+\infty}-3n^5$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n\to+\infty}2n^9$

**أجوبة:** $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{n^3}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}-3n^5=-\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6=-\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}2n^9=+\infty$

**تمرين2 :** أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

**أجوبة:** $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3=0+3=3$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7=0-7=-7$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5=0+5=5$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}=0$

**تمرين3 :** أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}2^n$ , $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ , $\lim_{n\to+\infty}(-5)^n$

**أجوبة:** $\lim_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ لأن: $a=2>1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن : $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$(-5)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-5<-1$

**تمرين4 :** أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}(0,7)^n$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$ و $\lim_{n\to+\infty}3^n-\frac{1}{2^n}$ و $\lim_{n\to+\infty}(-2)^n$ , $\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n}$ , $\lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}$

**أجوبة:** $\lim_{n\to+\infty}(0.7)^n=0$ لأن : $-1<a=0.7<1$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2}^n=+\infty$ لأن: $a=\sqrt{2}>1$ و

$\lim_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}=+\infty-0=+\infty$

$(-2)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-2<-1$

$\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(4)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن : $-1<a=\frac{1}{4}<1$

و $\lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ لأن: $a=\frac{5}{4}>1$

**تمرين5 :** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1$ 2) $\lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$ 4) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$ 5) $\lim_{n\to+\infty}n^2-n$ 6) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$

**أجوبة:** 1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1=0-0+0-1=-1$

لأن: $-1<a=\frac{2}{3}<1$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

2) $\lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=(-3+0)(1+0)=(-3)(1)=-3$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$

3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{4}{3}$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{n^2}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

5) $\lim_{n\to+\infty}n^2-n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

4) $\lim_{n\to+\infty}n^2-n=\lim_{n\to+\infty}n(n-1)=+\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$

و $\lim_{n\to+\infty}n-1=+\infty$ و $-1<a=\frac{2}{3}<1$ $+\infty\times+\infty=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n}{(2)^n}+\frac{(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n+1=+\infty+1=+\infty$



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

6) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$ و $+\infty\times-\infty=-\infty$

**تمرين6:** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{5+\dfrac{1}{n}}{3-\dfrac{7}{n^2}}$

2) $\lim_{n\to+\infty}4n^3-5n^2+3n-1$ 3) $\lim_{n\to+\infty}6n^3-2n^5+7n-9$

4) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{9n-3}{3n+5}$ 5) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{6n^2-9}{3n+1}$ 6) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{n^5+3n-4}$

7) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$ 8) $\lim_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2$

**أجوبة:** 1) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}=\dfrac{5}{3}$ لأن: $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{7}{n^2}=0$

2) $\lim_{n\to+\infty}4n^3-5n^2+3n-1=\lim_{n\to+\infty}4n^3=+\infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

3) $\lim_{n\to+\infty}6n^3-2n^5+7n-9=\lim_{n\to+\infty}-2n^5=\infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{9n-3}{3n+5}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{9n}{3n}=\dfrac{9}{3}=3$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

5) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{6n^2-9}{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{6n^2}{3n}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{3\times2\times n\times n}{3n}=\lim_{n\to+\infty}2\times n=+\infty$

لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة

6) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{n^5+3n-4}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^5}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$

7) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{7n^2}{14n^3}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{7n\times n}{14n\times n\times n}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$

8) $\lim_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2=\lim_{n\to+\infty}n^2+2n+1-\left(n^2-2n+1\right)=\lim_{n\to+\infty}4n=+\infty$

**تمرين7 :** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=5u_n+8\\u_0=4\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+2$

1. أحسب $u_1$ و $v_0$ و $v_1$

2. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها : 5

3. أكتب $v_n$ بدلالة $n$

4. استنتج $u_n$ بدلالة $n$

5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty}v_n$ و $\lim_{n\to+\infty}u_n$

**الجواب:** 1) نعوض n ب 0

فنجد: $u_{0+1}=5\times u_0+8=5\times4+8=28$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+2=4+2=6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+2=28+2=30$

2) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{u_{n+1}+2}{u_n+2}=\dfrac{5u_n+8+2}{u_n+2}=\dfrac{5u_n+10}{u_n+2}=\dfrac{5(u_n+2)}{u_n+2}=5=q$

اذن: المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=5$

وحدها الأول $v_0=6$

3) كتابة $v_n$ بدلالة $n$

بما أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $v_0$

فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=6\times(5)^n$

استنتاج $u_n$ بدلالة $n$

4) لدينا: $v_n=u_n+2$ اذن: $v_n-2=u_n$ أي: $u_n=6\times(5)^n-2$

5) $\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}6\times(5)^n=+\infty$ : لأن : $\lim_{n\to+\infty}(5)^n=0$ : $1<q=5$

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}6\times(5)^n-2=+\infty$

**تمرين8 :** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+2\\u_0=-1\end{cases}$$ ونعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة كالتالي : $v_n=u_n-\dfrac{8}{3}$

1. أحسب $u_1$ و $v_0$ و $v_1$

2. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$

3. أكتب $v_n$ بدلالة $n$

4. استنتج $u_n$ بدلالة $n$

5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty}v_n$ و $\lim_{n\to+\infty}u_n$

**الأجوبة** 1) نعوض n ب 0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{4}\times u_0+2=\frac{1}{4}\times(-1)+2=-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4}$ اذن : $u_1=\dfrac{7}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد :

$v_0=u_0-\dfrac{8}{3}=-1-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{11}{3}$

و نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{11}{3}-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{19}{3}$

2) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{u_{n+1}-\frac{8}{3}}{u_n-\frac{8}{3}}=\dfrac{\frac{1}{4}u_n+2-\frac{8}{3}}{u_n-\frac{8}{3}}=\dfrac{\frac{1}{4}u_n-\frac{2}{3}}{u_n-\frac{8}{3}}=\dfrac{\frac{1}{4}\left(u_n-\frac{8}{3}\right)}{u_n-\frac{8}{3}}=\dfrac{1}{4}=q$

اذن: المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$

وحدها الأول $v_0=-\frac{11}{3}$

3) كتابة $v_n$ بدلالة $n$ :بما أن المتتالية $(v_n)$ هندسية



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0$ فان: $v_n=v_0\times q^n$

أي: $v_n=-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) استنتاج $u_n$ بدلالة $n$ لدينا: $v_n=u_n-\frac{8}{3}$ اذن: $v_n+\frac{8}{3}=u_n$

أي: $u_n=-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{8}{3}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$ $-1<a=\frac{1}{4}<1$

**تمرين9 :** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+5\\u_0=4\end{cases}$ ونعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة كالتالي : $v_n=u_n-10$

1. أحسب $u_1$ و $u_2$ و $v_0$ و $v_1$

2. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

3. أكتب $v_n$ بدلالة $n$ و استنتج $u_n$ بدلالة $n$

4. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

**الجواب:** نعوض n ب0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{2}\times u_0+5=\frac{1}{2}\times4+5=2+5=7$ اذن : $u_1=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=\frac{1}{2}\times u_1+5=\frac{1}{2}\times7+5=\frac{7}{2}+\frac{10}{2}=\frac{17}{2}$

اذن : $u_2=\frac{17}{2}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-10=4-10=-6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-10=7-10=-3$

2)

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-10}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}u_n+5-10}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}u_n-5}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}u_n-\frac{10}{2}}{u_n-10}=\frac{\frac{1}{2}(u_n-10)}{u_n-10}=\frac{1}{2}=q$

اذن: المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=-6$

3) كتابة $v_n$ بدلالة $n$

بما أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0=-6$ فان: $v_n=(-6)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج $u_n$ بدلالة $n$ : لدينا: $v_n=u_n-10$

اذن: $u_n=v_n+10$ أي: $u_n=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+10$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ولأن $-1<a=\frac{1}{2}<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+10=0+10=10$



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com