Madarisy.com : مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي

Lycée Al Fath, Lqliâa
Inzegane-Ait-Melloul

Série des exercices
Cours : les suites numériques

Prof. Mohamed SELLAH
2BAC SGC et SE

Exercice 1

Considérons la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u_n < 1$

3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2-u_n}$

b- Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.

4) Posons $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$

c- Calculer v_n en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1- Calculer u_1 et u_2

2- a) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{3 - u_n}$

b) démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n < 2$

c) démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)^2}{3 - u_n}$

d) déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.

3- posant $v_n = \dfrac{1}{2 - u_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) calculer $v_{n+1} - v_n$ puis déduire que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$

b) Calculer v_0 puis calculer v_n en fonction de n

c) Déduire que $u_n = 2 - \dfrac{1}{v_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ puis déduire que $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4} u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. démontrer par récurrence que $u_n > 4 \ ; \forall n \in \mathbb{N}$
3. a) démontrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3}{4}(u_n - 4); \forall n \in \mathbb{N}$

b) déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente

4. Posant $v_n = u_n - 4 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer v_0

b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

c) Calculer v_n en fonction de n puis déduire que $u_n = 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 4 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$. calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 4

soit $(u_n)_{IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \ ; n \in N \end{cases}$

1 - Calculer u_1 et u_2

2 - a) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} + 1 = \dfrac{2(u_n + 1)}{3 + u_n}$

b) démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n > -1$

c) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n + 1)^2}{3 + u_n}$

b) déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

3 - posant $v_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) calculer v_0

b) calculer $v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)}$

c) démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$

d) calculer v_n en fonction de n

4 - a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n = \dfrac{-v_n + 2}{v_n - 1}$ puis déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n = \dfrac{-n}{n+2}$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

Lycée Al Fath, Lqliâa
Inzegane-Ait-Melloul

Série des exercices
Cours : les suites numériques

Prof. Mohamed SELLAH
2BAC SGC et SE

Exercice 5

Considérons la suite numérique (U_n) définie par : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > \frac{1}{2}$

3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

b- Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.

c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \leq 1$, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

4) Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

b- Calculer v_n en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{2}\left(11\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right)$

c- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

5) Posons $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$ montrer que $S_n = \frac{55}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{n}{2}$

Exercice 6

Considérons la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \quad ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > \frac{1}{2}$

3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

b- Déduire la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle est convergente.

c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \leq 1$, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

4) Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- Calculer v_0, et montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b- Calculer v_n en fonction de n, et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

c- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6} \end{cases}$

1. démontrer par récurrence que $(\forall n \in N)\ u_n > 1$
2. démontrer que la suite (u_n) est décroissante puis déduire que' elle est convergente.

1. posant : $v_n = u_n - 1$
   a) démontrer que la suite (v_n) est géométrique à déterminer sa raison
   b) Calculer v_n en fonction de n
   c) Calculer u_n en fonction de n
   d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 8

Considérons la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1- Calculer u_1 et u_2

2- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 1$

3- a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n}$

b- Étudier la monotonie de (u_n) et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \leq 2$

c- Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $1 < u_n \leq 2$

4- Considérons la suite (v_n) tel que $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}; n \in \mathbb{N}$

a- Calculer v_0 et v_1

b- Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $r = -1$ et déterminer v_n en fonction de n.

c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$ et déduire u_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

d- Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع