مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com



## .01

ندرس اتصال الدالة f في $x_0$ ؟ ( وذلك في النقطة $x_0$ إذا كان ذلك ممكنا و إذا لم يكن ممكن على اليمين أو اليسار ) .

**.01** $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2+1)}{x^2-3x+2} \; ; \; x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\} \\ f(2)=5 \end{cases}$ ندرس اتصال في $x_0=2$ .

لدينا :

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+1)}{x^2-3x+2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+1)}{(x-1)}$$
$$=5$$
$$=f(2)$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

خلاصة : الدالة f متصلة في $x_0=2$ .

**.02** $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1} \; ; \; x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ f(1)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ندرس اتصال في $x_0=1$ .

لدينا :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة في $x_0=1$ .



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com



**.03** $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \; ; \; x\in[2,+\infty[\setminus\{4\} \\ f(4)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ ندرس اتصال في $x_0=4$ .

لدينا :

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-2-2)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=f(4)$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)$

خلاصة : الدالة $f$ متصلة في $x_0=4$ .

**.04** $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1} \; ; \; x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ f(-1)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ندرس اتصال في $x_0=-1$ .

- اتصال $f$ على يمين $x_0=-1$

لدينا :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{x+1-2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1} \qquad ; \quad \left(\lim_{x\to -1^+} x+1=0^+\right)$$

$$=+\infty$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



خلاصة : الدالة f غير متصلة على يمين $x_0=-1$ .

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0=-1$ .

- اتصال f على يسار $x_0=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1} \qquad ; \left(\lim_{x\to -1^-} x+1=0^-\right)$$
$$=-\infty$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0=-1$ .

.05 $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x}} \; ; \; x>1 \\ f(x)=\dfrac{2\sin(x-1)}{x-1} \; ; \; x<1 \\ f(1)=2 \end{cases}$ ندرس اتصال في $x_0=1$ .

- اتصال f على يمين $x_0=-1$ ؛ لدينا :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x}}$$
$$=0 \qquad ; \left(\lim_{x\to 1^+}\sin\left(x^2-1\right)=0 \; ; \; \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1\right)$$
$$\neq f(1) \qquad ; \left(f(1)=2\right)$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq f(1)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يمين $x_0=1$ .

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0=1$ .

- اتصال f على يسار $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2\sin(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{t\to 0^-}\frac{2\sin t}{t} \qquad ; \left(t=x-1 \; ; \; \left(x\to 1^-\right)\Rightarrow\left(t\to 0^-\right)\right)$$
$$=2 \qquad ; \left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\right)$$
$$=f(1)$$



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



ومنه : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0 = 1$ .

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$ لأنها غير متصلة على يسار $x_0 = 1$.

.06 ندرس اتصال في $x_0 = \pi$ .

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1+\cos x}{\sin x} & ; \ x \in ]-\pi, \pi[ \\ f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2-\pi^2}}{x} & ; \ x \in ]-\infty, -\pi] \cup [\pi, +\infty[ \end{cases}$$

- اتصال f على يمين $x_0 = \pi$

لدينا :

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} x + \frac{\sqrt{x^2-\pi^2}}{x}$$

$$= \pi \qquad ; \left(\lim_{x\to\pi^+} x^2 - \pi^2 = 0 \ ; \ \lim_{x\to\pi^+} x = \pi\right)$$

$$= f(\pi) \qquad ; \left(f(\pi) = \pi\right)$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = f(\pi)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يمين $x_0 = \pi$ .

- اتصال f على يسار $x_0 = \pi$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{1+\cos x}{\sin x} \qquad ; \cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \ ; \ \sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{t\to\pi^-} \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to\pi^-} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad ; \left(\lim_{t\to\pi^-} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \ ; \ \lim_{t\to\pi^-} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0\right)$$

$$= 0 \qquad ; \left(f(\pi) = \pi\right)$$

$$\neq f(\pi)$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) \neq f(\pi)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0 = \pi$ .

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$ لأنها غير متصلة على يسار $x_0 = 1$.

ملحوظة : يمكنك حساب النهاية على اليسار بطريقة أخرى



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{1+\cos x}{\sin x} \quad ; \left(x=\pi-t \ ; \ (x\to\pi^-)\Rightarrow(t\to 0^+)\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1+\cos(\pi-t)}{\sin(\pi-t)} \quad ; \ \left(\cos(\pi-t)=-\cos t \ ; \ \sin(\pi-t)=\sin t\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{t}\times\frac{t}{\sin t} \quad ; \left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \ ; \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

$$= 0\times 1$$

$$= 0 \quad ; (f(\pi)=\pi)$$

$$\neq f(\pi)$$

خلاصة : الدالة $f$ غير متصلة على يسار $x_0=\pi$ .

## 02.

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} f(x)=x+a\sqrt{x^2+x+1} & ; x\le 0 \\ f(x)=x^2-x & ; 0<x\le 1 \\ f(x)=bx-\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & ; x>1 \end{cases}$$

**01.** نحدد $a$ و $b$ لكي تكون $f$ متصلة في $0$ و $1$ .

- اتصال $f$ في $x_0=0$ . ( مع $f(0)=0+a\sqrt{0^2+0+1}=a$ )
  - على يمين $x_0=0$ .

$\lim_{x\to 0^+} x^2-x=0=a$ و $f(0)=a$ إذن لكي تكون $f$ متصلة على يمين $x_0=0$ يجب و منه : $a=0$ .

  - على يسار $x_0=0$ .

$\lim_{x\to 0^-} x+a\sqrt{x^2+x+1}=a=f(0)$ إذن $f$ متصلة على يسار $x_0=0$ .

وبالتالي : لكي تكون $f$ متصلة في $x_0=0$ يجب أن يكون $a=0$ .

- اتصال $f$ في $x_0=1$ . ( مع $f(0)=0+a\sqrt{0^2+0+1}=a$ )
  - على يمين $x_0=1$ .

لدينا :



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com



$$\lim_{x\to 1^+} bx-\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to 1^+} bx-\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+} bx-\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+} bx-\frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$=b-2$$

و $f(1)=1^2-1=0$ إذن لكي تكون $f$ متصلة على يمين $x_0=1$ يجب $\lim_{x\to 1^+} f(x)=b-2=0$ و منه : $b=2$ .

- على يسار $x_0=1$ .

$\lim_{x\to 1^-} x^2-x=0=f(1)$ إذن $f$ متصلة على يسار $x_0=1$ .

وبالتالي : لكي تكون $f$ متصلة في $x_0=1$ يجب أن يكون $b=2$ .

خلاصة : لكي تكون $f$ متصلة في 0 و 1 يجب : $a=0$ و $b=2$ .

**02.** نحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .

- نحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ .

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x-\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \quad ; \quad (b=2)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+3}-2}\right) \quad ; \quad \left(\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1 \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}-2=+\infty\right)$$

$$=+\infty$$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- نحسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+a\sqrt{x^2+x+1} \quad ; \quad (a=0)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x$$

$$=-\infty$$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ .



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



## .03

هل يمكن تمديد بالاتصال الدوال التالية في النقطة $x_0$ .

**.01** $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{2x+1}$ في $x_0=-\dfrac{1}{2}$ .

لدينا :

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2x^2-x-1}{2x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{(x-1)\cancel{(2x+1)}}{\cancel{2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{2}} x-1$$

$$=-\frac{3}{2}$$

خلاصة : يمكن تمديد بالاتصال الدالة f في النقطة $x_0=0$ .

حيث تمديد بالاتصال ل f في النقطة $x_0=-\dfrac{1}{2}$ هي الدالة g المعرفة ب :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{2x+1} \;;\; x\neq-\dfrac{1}{2} \\ g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$ .

ملحوظة : كذلك الدالة h المعرفة ب : $h(x)=x-1$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0=-\dfrac{1}{2}$

**.02** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$ في $x_0=0$ .

لدينا :

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4+x-(4-x)}{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2} \qquad ; \qquad \left(\lim_{x\to0}\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}=4\right)$$

خلاصة : يمكن تمديد بالاتصال الدالة f في النقطة $x_0=0$ .



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



حيث تمديد بالاتصال ل f في النقطة $x_0 = 0$ هي الدالة g المعرفة ب :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x} \quad ; \quad x \in [-4;0[\cup]0;4] \\ g(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ملحوظة : كذلك الدالة h المعرفة ب : $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = 0$

## 04.

لنعتبر الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متصلة و جدول تغيراتها كالتالي :

| x | $-\infty$ | $-5$ | $0$ | $1$ | $3$ | $10$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | ↘ $-5$ | ↗ 3 | ↘ $-10$ | ↗ 3 | ↘ 2 | ↗ $+\infty$ |

**01.** ما هو عدد حلول المعادلة : $x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$ .

- هناك حل على المجال : $]-\infty;-5[$ أو المجال $]-5;-\infty[$ .
- هناك حل على المجال : $]-5;0[$ أو $]0;-5[$ أو ....
- هناك حل على المجال : $]0;1[$ أو .....
- هناك حل على المجال : $]1;3[$ أو .....

خلاصة : المعادلة $x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$ لها 4 حلول .

**02.** ما هو عدد حلول المعادلة : $x \in [0,10] / f(x) = 2$ .

- هناك حل على المجال : $]0;1[$ أو .....
- هناك حل على المجال : $]1;3[$ أو .....
- هناك حل على المجال : $[3;10]$ .
- هناك حل على المجال : $[10;+\infty[$ .

خلاصة : المعادلة $x \in \mathbb{R} / f(x) = 2$ لها 4 حلول .

**03.** حدد حل المعادلة : $x \in \mathbb{R} / f(x) = -10$ .

الحل هو $x = 1$ .

خلاصة : حل المعادلة $x \in \mathbb{R} / f(x) = -10$ هو $x = 1$ .

**04.** نحدد صور المجالات التالية بواسطة f : $]-\infty;-5]$ و $]-\infty,0]$ و $[-5,3]$ و $[1;3]$ و $[3;10]$ و $[0,+\infty[$ و $\mathbb{R}$ .

لدينا :

- $f(]-\infty;-5]) = [-5;1[$ .
- $f(]-\infty,0]) = [-5;3]$ .
- $f(]-5,3]) = [-10;3]$ .
- $f([1;3[) = [-10;3[$ .
- $f(]3;10[) = ]2;3[$ .



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com



- $f\left(]0,+\infty[\right)=[-10;+\infty[$ .
- $f\left(\mathbb{R}\right)=[-10;+\infty[$

**05.** هل الدالة $f$ تقبل دالة عكسية من المجال $I$ إلى $f\left(I\right)$ . أ- $I=]-\infty,-5]$ ب- $I=]-\infty,0[$ ج- $I=]1,3]$ .

- على المجال $I=]-\infty,-5]$ .
- حسب المعطيات الدالة $f$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها متصلة على $I=]-\infty,-5]$ .
- حسب جدول تغيرات الدالة $f$ تناقصية قطعا على $I=]-\infty,-5]$ .

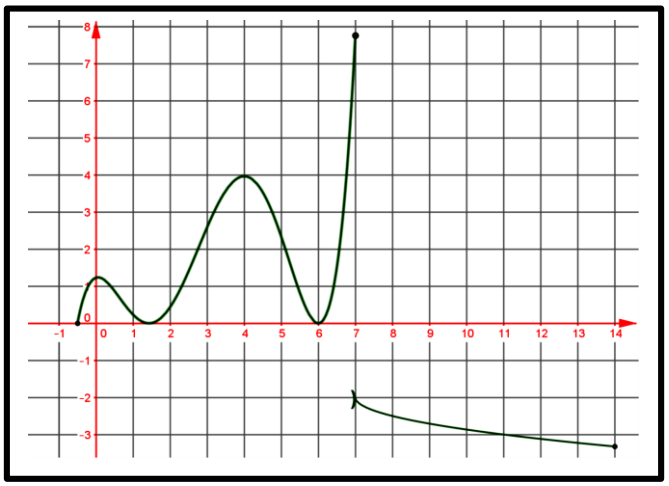
خلاصة : قصور الدالة $f$ تقبل دالة عكسية من المجال $I=]-\infty,-5]$ إلى $f\left(I\right)=[-5;1[$ .

- على المجال $I=]-\infty,0[$ .
- حسب المعطيات الدالة $f$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها متصلة على $I=]-\infty,0[$ .
- حسب جدول تغيرات الدالة $f$ ليست رتيبة قطعا على $I=]-\infty,0[$ .

خلاصة : قصور الدالة $f$ لا تقبل دالة عكسية من المجال $I=]-\infty,0[$ إلى $f\left(I\right)$ .

- على المجال $]1,3]$ .
- حسب المعطيات الدالة $f$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها متصلة $]1,3]$ .
- حسب جدول تغيرات الدالة $f$ تزايدية قطعا على $]1,3]$ .

خلاصة : قصور الدالة $f$ تقبل دالة عكسية من المجال $]1,3]$ إلى $f\left(I\right)=]-10;3]$ .



## 05.

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $[-0,5;14]$ و الشكل التالي يمثل منحنها .

**01.** أعط نص أو منطوق مبرهنة القيم الوسيطية .

منطوق مبرهنة القيم الوسيطية :

$f$ دالة متصلة على القطعة $[a,b]$ . $(a<b)$

- لكل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر $c$ من $[a,b]$ حيث : $f(c)=k$ .

**02.** أوجد مجالين حيث يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية مع توضيح ذلك .

- يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية على المجال $[0;5]$ ؛مبيانيا الدالة $f$ متصلة على $[0;5]$ .
- يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية على المجال $[8;14]$ ؛مبيانيا الدالة $f$ متصلة على $[8;14]$ .

**03.** أوجد مجال حيث لا يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية مع توضيح ذلك .

- لا يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية على المجال $[4;11]$ ؛ مبيانيا الدالة $f$ غير متصلة على $[4;11]$ ( لأنها غير متصلة في 7 )



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com



لدينا : $f(4)=4$ و $f(11)=-3$ نأخذ $k=-1$ هو محصور بين $f(4)=4$ و $f(11)=-3$ ولكن لا يوجد $c$ من $[4;11]$ حيث $f(c)=-1$ .

**04.** يمكن إيجاد عدد $\beta$ وحيد حيث $f(\beta)=6$ تقاطع المنحنى و المستقيم $(D)$ الذي معادلته $(D): y=6$ يحدد نقطة وحيدة ذلك .؟

نعطي تأطير ل $\beta$ ؛ مبيانيا $6,5<\beta<7$ .

## 06.

لنعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=x^2\cos^5 x+x\sin x+1$

**01.** نحسب : $f(0)$ و $f(\pi)$ ثم بين أن المعادلة : $x^2\cos^5 x+x\sin x+1=0$ تقبل حل الأقل حل على $\mathbb{R}$ .

لدينا :

- الدالة $f$ هي متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع و جداء دوال متصلة $\mathbb{R}$ إذن الدوال $f$ متصلة على $[0;\pi]$ .
- $f(0)=1>0$ و $f(\pi)=-\pi^2+1<0$ لإذن $f(0)\times f(\pi)<0$ إذن $0$ محصور بين $f(0)$ و $f(\pi)$

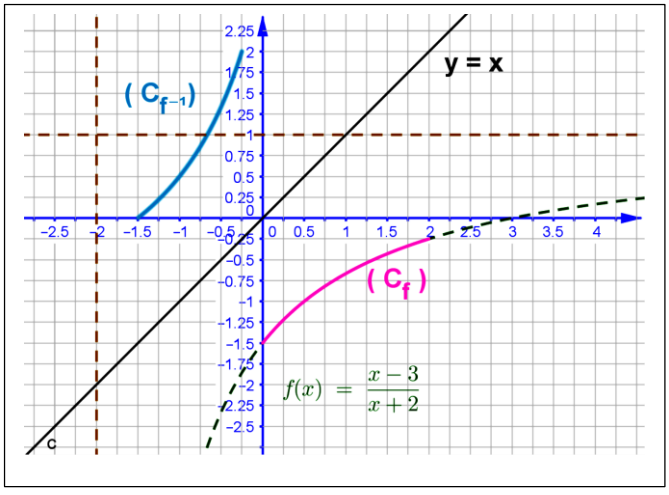
إدن حسب مبرهنة القيمة الوسيطية يوجد على الأقل $c$ من $[0;\pi]$ حيث $f(c)=0$ و بالتالي $f(x)=0$ تقبل حل الأقل حل على $[0;\pi]$ ومنه $x^2\cos^5 x+x\sin x+1=0$ تقبل حل الأقل حل على $\mathbb{R}$ .

خلاصة : المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حل الأقل حل على $\mathbb{R}$ .

## 07.

❖ لنعتبر $f$ الدالة المعرفة على $[0,2]$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$.

**01.** باستعمال دروس السنة الماضية أو باستعمال البَرْنام geogebra ( أو بَرْنام آخر مثل Cabri2+ ) ننشئ منحنى $f$ ثم استنتج أن $f$ هي تقابل من $[0,2]$ نحو $J$ حدده مبيانيا .




مبيانيا الدالة $f$ متصلة و تزايدية قطعا على $[0,2]$ و $J=[-0,5;0,25]$

خلاصة : $f$ هي تقابل من $[0,2]$ نحو $J=[-0,5;0,25]$

**02..**

- أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة العكسية $f^{-1}$ . ( أنظر الشكل )
- حدد $f^{-1}$ الدالة العكسية ل $F$ .

ليكن $x$ من $[0,2]$ و $y$ من $J=[-0,5;0,25]$

حيث $x=f^{-1}(y)$ و $y=f(x)$



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2}=y$$
$$\Leftrightarrow x-3=xy+2y$$
$$\Leftrightarrow x-xy=3+2y$$
$$\Leftrightarrow x(1-y)=3+2y$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3+2y}{1-y}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3+2y}{1-y}=f^{-1}(y)$$

و منه : $f^{-1}(y)=\frac{3+2y}{1-y}$ .

خلاصة : الدالة العكسية $f^{-1}$ ل $f$ هي : $f^{-1}:J=[-0,5;0,25]\to[0,2]$ ; $x\mapsto f^{-1}(x)=\frac{3+2x}{1-x}$

❖ لنعتبر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ الدالة المعرفة ب : $f(x)=(x-4)^2+2$.

**01.**

أ- نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-4)^2+2=+\infty$

ب- أدرس اتصال الدالة على المجموعة $\mathbb{R}$ .

الدالة $f$ هي متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها حدودية .

**02.** بين أن : الدالة $f$ تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$ .

لدينا : $f'(x)=\left[(x-4)^2+2\right]'=2(x-4)'(x-4)=2(x-4)$ و منه : على $I=]-\infty,4[$ فإن $f'(x)<0$ الدالة $f$ تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$ . ملحوظة : يمكنك استعمال معدل تغيرات $f$ لدراسة الرتابة .

خلاصة : الدالة $f$ تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$ .

**03.** لنعتبر $g$ قصور الدالة $f$ على $I=]-\infty,4]$ بين أن : $g$ تقابل من $I$ إلى مجال $J$ يتم تحدده .

- الدالة $f$ هي متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها $g$ هي متصلة على $I=]-\infty,4]$ .
- الدالة $f$ تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$ إذن قصورها $g$ تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$ .

خلاصة : $g$ قصور الدالة $f$ على $I=]-\infty,4]$ هي $g$ تقابل من $I$ إلى مجال $J=f(]-\infty,4])=\left[g(4);\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right[=[2;+\infty[$

**04.** نحدد للدالة العكسية $g^{-1}$ للدالة $g$ .

ليكن $x$ من $I=]-\infty,4]$ و $y$ من $J=[2;+\infty[$ . مع $g(x)=y \Leftrightarrow x=g^{-1}(y)$ .



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



$$g(x)=y \Leftrightarrow (x-4)^2+2=y$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow (x-4)^2=y-2$$

$$\Leftrightarrow x-4=\sqrt{y-2} \ \vee \ x-4=-\sqrt{y-2}$$

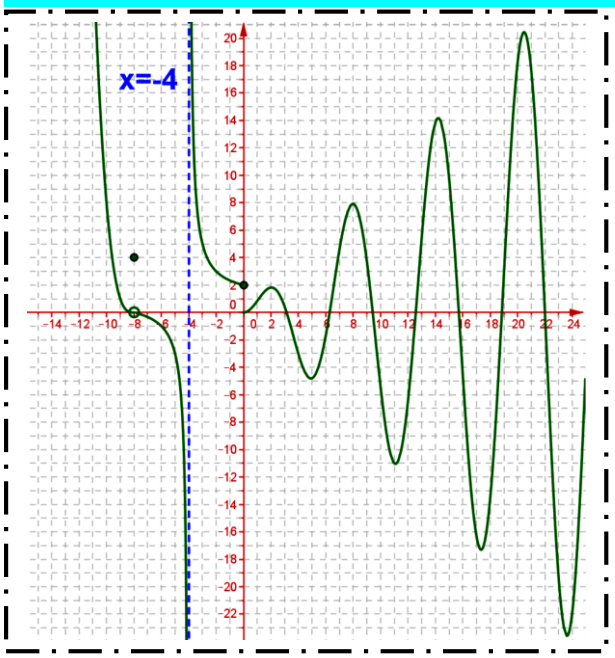
بما أن : $x\in I=]-\infty,4]$ إذن $x\le 4$ ومنه $x-4\le 0$ بالنسبة ل $x-4=\sqrt{y-2}$ غير ممكن لأن :

ومنه نأخذ $x-4=-\sqrt{y-2}$ إذن $x=4-\sqrt{y-2}$ .

ومنه : $g^{-1}(y)=4-\sqrt{y-2}$ .

خلاصة : للدالة العكسية $g^{-1}$ : $g^{-1}:[2;+\infty[\to]-\infty,4]$ ; $y\mapsto g^{-1}(y)=4-\sqrt{y-2}$

و يمكن كتابة : $g^{-1}:[2;+\infty[\to]-\infty,4]$ ; $x\mapsto g^{-1}(x)=4-\sqrt{x-2}$




## 08.

نعتبر الدالة العددية f التي منحناها هو:

**01.** حدد مبيانيا $D_f$ مجموعة تعريف f.

مبيانيا : مجموعة تعريف f هي $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ .

**02.** استنتج مبيانيا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -8} f(x)$ .

لدينا :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=2$ .
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to -8} f(x)=0$ .
- بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ مبيانيا f ليس لها نهاية عند $+\infty$ .

**03.** أ ـ هل f متصلة على يمين 0 ؟ على يسار 0 ؟ : متصلة في $x_0=0$ ؟

- f غير متصلة على يمين 0 .
- f متصلة على يسار 0 .
- f غير متصلة في 0 .

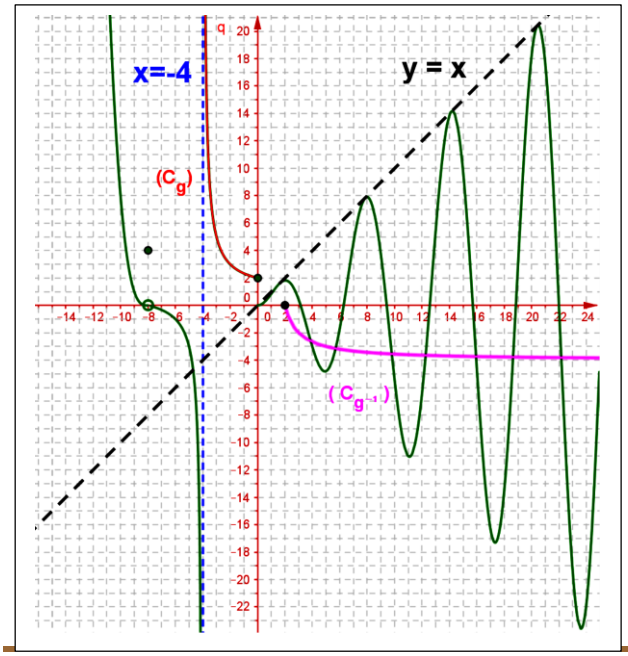
ب ـ نعطي جدول تغيرات f على $]-4;3]$ .

| x | 4 | | 0 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ‖ | $+\infty$ ↘ | $f(0)=2$ | ↗ | 2 / 0 |

**04.** ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-4;0]$

أ ـ بين أن : g تقبل دالة عكسية $g^{-1}$ من J إلى I مع تحديد J مبيانيا.

- مبيانيا الدالة g قصور الدالة هي متصلة على $I=]-4;0]$ .
- مبيانيا الدالة g قصور الدالة هي تناقصية قطعا على $I=]-4;0]$ .






Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



خلاصة : g قصور الدالة f على $I=]-4;0]$ هي تقابل من $I=]-4;0]$ إلى مجال $f(]-4;0])=[2;+\infty[$

$J=f(]-\infty,4])=\left[g(4);\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right[=[2;+\infty[$

ب- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ منحنى f في نفس المعلم . ( أنظر الشكل )

## .09

نضع : $a=\sqrt[3]{41\sqrt{5}+54\sqrt{3}}$ و $b=\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}$

01. باستعمال المحسبة ( الآلة الحاسبة ) هل ab هو $\frac{1}{3}$ ؛ 1 ؛ 7 ؛ $\frac{7}{3}$ .

خلاصة : باستعمال المحسبة : $ab=7$

## .10

01. بين أن: و $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[12]{3^9\times2^8}=6$ و $\frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}}\sqrt{27}\times3^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[6]{3}\times\sqrt{3}}=9$ .اجعل المقام عدد جذري : $\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$ .

- لدينا :

$$\sqrt[4]{3}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[12]{3^9\times2^8}=\sqrt[4\times3]{3^3}\times\sqrt[3\times4]{2^4}\times\sqrt[12]{3^9\times2^8}$$
$$=\sqrt[12]{3^3\times2^4\times3^9\times2^8}$$
$$=\sqrt[12]{3^{12}\times2^{12}}$$
$$=\sqrt[12]{(2\times3)^{12}}=6$$

خلاصة : $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[12]{3^9\times2^8}=6$

- لدينا :

$$\frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}}\sqrt{27}\times3^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[6]{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt[15]{9}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{3}{2}}\times3^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{\left(3^{\frac{2}{15}}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{2}}}$$
$$=3^{\frac{4}{15}}\times3^{\frac{12}{5}}\times3^{-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{4}{15}+\frac{12}{5}-\frac{2}{3}}=3^2=9$$

خلاصة : $\frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}}\sqrt{27}\times3^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[6]{3}\times\sqrt{3}}=9$



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com



- اجعل المقام عدد جذري :

تذكير :

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ إذن $(a-b)$ و $(a^2+ab+b^2)$ إحداهما الصيغة المرافق للأخر بالنسبة للجذر من الرتبة 3 .

مثال : $\sqrt[3]{x}-2=\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\times 2+2^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\times 2+2^2\right)}$ نأخذ $a=\sqrt[3]{x}$ و $b=2$ .

لدينا :

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}\times 1+1^2}=\frac{2\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}\times 1+1^2\right)\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-1^3}=\frac{2\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{3-1}=\sqrt[3]{3}-1$$

خلاصة : $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}-1$

## تمرين 11

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية: $f(x)=\sqrt{x^2-3}$ ؛ $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x+3)}$ ؛ $f(x)=\sqrt[6]{9-x^2}-\sqrt[7]{x+1}$ .

01. نحدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

- لنعتبر الدالة العددية التالية: $f(x)=\sqrt{x^2-3}$ .

لدينا :

$$x\in D_f \Leftrightarrow x^2-3\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\in ]-\infty;-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3};+\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة هي : $D_f=]-\infty;-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3};+\infty[$ .

- لنعتبر الدالة العددية التالية: $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x+3)}$ .

لدينا :

$$x\in D_f \Leftrightarrow (x-1)(x+3)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\in ]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة هي : $D_f=]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$ .

- لنعتبر الدالة العددية التالية: $f(x)=\sqrt[6]{9-x^2}-\sqrt[7]{x+1}$ .

لدينا :

$$x\in D_f \Leftrightarrow 9-x^2\geq 0 \text{ و } x+1\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (3-x)(3+x)\geq 0 \text{ و } x+1\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\in ]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[ \text{ و } x\geq -1$$



للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

Madarisy.com : مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي



$\Leftrightarrow x \in ]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[ \cap [1;+\infty[$

$\Leftrightarrow x \in [3;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة هي : $D_f = ]-\infty;-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};+\infty[$ .

## 12.

أحسب النهايات التالية :

**01.** نحسب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} = +\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+x+1 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[5]{x^4+1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ .
- $\lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{\sqrt[6]{4-x}}{x} = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to4^-} \sqrt[6]{4-x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to4^-} x = 4$
- $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to1^+} \sqrt[3]{x-1} = 0^+$ و $\lim\limits_{x\to1^+} x = 1$ .
- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-1}{x\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1} \quad ; \left(|x^3| = x; |x^2| = x; x \to +\infty\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-\frac{1}{x}\right]}{x\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\frac{1}{x}\right]}$$

$$= 1 \quad ; \left(\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-\frac{1}{x} = 1; \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\frac{1}{x} = 1\right)$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1} = 1$

- لدينا :



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[4]{x^5+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-\sqrt[4]{x^5\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-x\times\sqrt[4]{x\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}\quad;\left(\sqrt[4]{x^5}=\sqrt[4]{x^4}\times\sqrt[4]{x}=x\times\sqrt[4]{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\times\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-\sqrt[4]{x\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}\right]$$

$$=-\infty\qquad;\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=1;\lim_{x\to+\infty}-\sqrt[4]{x\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}=-\infty\right)$$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[4]{x^5+1}=-\infty$.

**.02** $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-x$ ؛ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ ؛ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x-2}}{x}$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ ؛ $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt[4]{x^5+1}}{x+1}$

- $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ لدينا :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\qquad;\left(\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1=3\right)$$

خلاصة : $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{3}$

- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-x$ لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-x\right)\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}^2-\sqrt[3]{x^3+x+1}\times x+x^2\right)}{\sqrt[3]{x^3+x+1}^2-\sqrt[3]{x^3+x+1}\times x+x^2}$$

( استعمال المرافق )



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}\right)^3 - x^3}{\sqrt[3]{x^3+x+1}^2 + \sqrt[3]{x^3+x+1}\times x + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}+x+1-\cancel{x^3}}{\sqrt[3]{x^3+x+1}^2 + \sqrt[3]{x^3+x+1}\times x + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\times x + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + x\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\times x + x^2} \quad \left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 = \sqrt[3]{\left(x^3\right)^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right)}$$

$$= 0$$

لأن :

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}+1 = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right) = +\infty$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1}-x = 0$

- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ لدينا :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2 + \sqrt[3]{1+x^2}\times1+1^2\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2 + \sqrt[3]{1+x^2}\times1+1^2\right)}$$ ( استعمال المرافق )



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}^3-1^3}{x^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}\times 1+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1}$$

$$=\frac{1}{3}$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\dfrac{1}{3}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x+2}}{x}$ لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x+2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x+2}\right)\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3\right)}{x\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x-2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x-2}^2+\sqrt[4]{3x-2}^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+2}^4-\sqrt[4]{3x+2}^4}{x\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-(3x+2)}{x\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt[4]{2}^3+\sqrt[4]{2}^2\times\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{2}^2+\sqrt[4]{2}^3}$$

$$=\frac{-2}{4\times\sqrt[4]{2}^3}$$



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



$$=\frac{-1\times\sqrt[4]{2}}{2\times\sqrt[4]{2}^{3}\times\sqrt[4]{2}}$$
$$=\frac{-1\times\sqrt[4]{2}}{2\times 2}$$
$$=\frac{-\sqrt[4]{2}}{4}$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x+2}}{x}=\dfrac{-\sqrt[4]{2}}{4}$

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1^2\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1^2\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{3}-1^3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}^{2}-1^2\right)\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1^2\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^3+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}+\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(x\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}{x^2\left(x^2\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}+x\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right)}\qquad\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}=x^2\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{1}{x}\right)}{x^2\times x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}+\frac{1}{x}\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+\frac{1}{x^2}\right)}$$



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



$$\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\frac{1}{x}\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+\frac{1}{x^2}=1\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{1}{x}=1\right)\quad;\quad =\frac{1}{1}=1$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=1$

- $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt[4]{x^5+1}}{x+1}$ لدينا :

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt[4]{x^5+1}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt[4]{x^5+1}\times\sqrt[4]{x^5+1}^3}{(x+1)\sqrt[4]{x+1}^3}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^5+1}{(x+1)\sqrt[4]{(x+1)}^3}\quad;\quad\left(x^5+1=x^5-(-1)^5\right)$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^5-(-1)^5}{(x+1)\sqrt[4]{(x+1)}^3}\quad;\quad\left(a^5-b^5=(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\cancel{(x+1)}\left(x^4+x^3\times(-1)+x^2\times(-1)^2+x\times(-1)^3+(-1)^4\right)}{\cancel{(x+1)}\sqrt[4]{(x+1)}^3}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)}{\sqrt[4]{(x+1)}^3}$$

$$=+\infty\quad;\quad\left(\lim_{x\to(-1)^+}x^4-x^3+x^2-x+1=5\ ;\ \lim_{x\to(-1)^+}\sqrt[4]{(x+1)}^3=0^+\right)$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt[4]{x^5+1}}{x+1}=+\infty$

## .13

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة ب: $\begin{cases}f(x)=\sqrt[3]{1-x} & ;\ x<0\\ f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} & ;\ x\geq 0\end{cases}$ .

**.01** نحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وأول مبيانيا النتيجة .

لدينا :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=0$ ; $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}1+\sqrt{x}=+\infty\right)$ .
- تأويل هندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل مقارب أفقي معادلته هي $y=0$ .

**.02** ندرس اتصال f في النقطة $x_0=0$ .



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي



- اتصال الدالة f على يمين $x_0 = 0$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 = f(0)$ ؛ و منه الدالة f متصلة على يمين $x_0 = 0$ .

- اتصال الدالة f على يسار $x_0 = 0$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{1-x} = 1 = f(0)$ ؛ و منه الدالة f متصلة على يسار $x_0 = 0$ .

خلاصة : الدالة f متصلة في $x_0 = 0$ .

## تمرين 14.

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ .

**01.** حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة f.

لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2+1 > 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 > -1$$

و هذا دائما صحيح لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ و منه : f معرفة على $\mathbb{R}$ .

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$ .

**02.** ندرس زوجية الدالة f على $D_f$ .

لدينا :

- لكل x من $\mathbb{R}$ كذلك $-x$ من $\mathbb{R}$ .
- ليكن x من $\mathbb{R}$ :

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2+1}}$$
$$= -\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$
$$= -f(x)$$

و منه : $f(-x) = -f(x)$

خلاصة : الدالة f فردية على $D_f = \mathbb{R}$ .

**03.** أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ . أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

- نحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ لدينا :



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} \qquad \left(\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= +\infty \qquad ; \qquad \left(\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty\right)$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- نحسب : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$ . لدينا :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} \times \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$= 1$$

و منه : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$

نلاحظ أن : $\left(f(0)=0\right)$ ; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \in \mathbb{R}$

إذن : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \in \mathbb{R}$ ومنه الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على يمين النقطة $x_0 = 0$ و العدد المشتق على يمين

- نعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها النقطة $x_0 = 0$ هو $f'_d(0) = 1$ .

و منه : منحنى الدالة $f$ يقبل نصف مماس في النقطة $x_0 = 0$ معامله الموجه هو $m = f'_d(0) = 1$ .



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي



## 15.

**01.** نعتبر المعادلة : $\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{x+2}+3=0$ : $(E)$ .

- نحدد مجموعة تعريف المعادلة $(E)$ . لدينا :

$$x\in D_f \Leftrightarrow x+2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\geq -2$$
$$\Leftrightarrow x\in[-2;+\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة $(E)$ $D_f=[-2;+\infty[$ .

- نحل المعادلة $(E)$ على $[-2;+\infty[$ .

لدينا :

$$(E)\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)^2}-4\sqrt[3]{x+2}+3=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)}^2-4\sqrt[3]{x+2}+3=0$$
$$\Leftrightarrow X^2-4X+3=0 \quad ; \quad \left(X=\sqrt[3]{(x+2)}\right)$$
$$\Leftrightarrow X=3 \text{ أو } X=1$$
$$\Leftrightarrow X=\sqrt[3]{(x+2)}=3 \text{ أو } X=\sqrt[3]{(x+2)}=1$$
$$\Leftrightarrow x+2=3^3 \text{ أو } x+2=1^3$$
$$\Leftrightarrow x=25\in[-2;+\infty[ \text{ أو } x=-1\in[-2;+\infty[$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{-1;25\}$ .



Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع