مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	المتتاليات العددية حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $u_0=1$; $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{n^2+5}$; $n\geq 0$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN \quad u_n>0$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=1$ و $1>0$
- نفترض أن $u_n>0$ ونبين أن $u_{n+1}>0$

لدينا : $u_n>0 \Rightarrow \dfrac{u_n}{n^2+5}>0 \Rightarrow u_{n+1}>0$ ، بالتالي وحسب مبدأ الترجع فإن : $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n>0}$

2

لنبين أن $\forall n\in IN \quad u_{n+1}\leq \dfrac{1}{5}u_n$

لدينا : $u_{n+1}-\dfrac{1}{5}u_n=\dfrac{u_n}{n^2+5}-\dfrac{1}{5}u_n=u_n\left(\dfrac{1}{n^2+5}-\dfrac{1}{5}\right)=u_n\left(\dfrac{5-n^2-5}{5(n^2+5)}\right)=\dfrac{-n^2u_n}{5(n^2+5)}<0$ (لأن $u_n>0$)

يمكن بسهولة و باستعمال التأطير إثبات المتفاوتة المطلوبة، لكن الطريقة المستعملة تعتبر أفضل لكونها أعم، إذ في بعض الحالات يكون حساب الفرق و تحديد إشارته الطريقة الوحيدة

3

لنبين أن : $0\leq u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n \quad \forall n\in IN^*$ ، المتفاوتة $0\leq u_n$ سبق إثباتها في السؤال الأول

طريقة 1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN^* \quad u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

- بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة لأن : $u_1=\dfrac{u_0}{0+5}=\dfrac{1}{5}$ و $\dfrac{1}{5}\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^1$
- نفترض أن $u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ ونبين أن $u_{n+1}\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

لدينا $u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ إذن : $\dfrac{1}{5}u_n\leq\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

أي $\dfrac{1}{5}u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

ونعلم أن: $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{5}u_n$ (حسب السؤال السابق)

إذن : $u_{n+1}\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

طريقة 2

نعلم أن: $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{5}u_n$ (حسب السؤال السابق)

$$\begin{cases} u_1\leq\dfrac{1}{5}u_0 \\ u_2\leq\dfrac{1}{5}u_1 \\ \ldots\leq\ldots \\ \ldots\leq\ldots \\ u_n\leq\dfrac{1}{5}u_{n-1} \end{cases}$$ إذن :

منه :

$u_1\times u_2\times\ldots\times u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$

منه : $u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n u_0$ بالتالي : $u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

يجب الانتباه أثناء استعمال الطريقة الثانية، إذ يجب التحقق أن جميع أطراف المتفاوتات موجبة و أيضا تحديد عدد المتفاوتات لأن هذا العدد يمثل أس القوة $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

4

لدينا : $0\leq u_n\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^n \quad \forall n\in IN^*$ و $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$ و $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}0=0$

إذن حسب مصاديق التقارب : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=0$ بالتالي u_n متقاربة نهايتها 0.

لاحظ أننا قمنا أولا بحساب النهاية و هو ما أثبت مباشرة تقارب المتتالية، و ذلك لأن السؤال لم يحدد إجبارية إثبات التقارب أولا (واو العطف يمكنك من اختيار الترتيب الذي تريد)

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

تمرين 2 : $u_0=-3\ ;\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}\quad ;\ n\geq 0$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN\quad u_n<4$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=-3$ و $-3<4$
- نفترض أن $u_n<4$ ونبين أن $u_{n+1}<4$

لدينا : $u_n<4\Rightarrow u_n+12<16\Rightarrow \sqrt{u_n+12}<4\Rightarrow u_{n+1}<4$

بالتالي وحسب مبدأ الترجع فإن : $\boxed{\forall n\in IN\quad u_n<4}$

2

لنبين أن $\forall n\in IN\quad 4-u_{n+1}\leq \frac{4-u_n}{4}$

لدينا : $4-u_{n+1}=4-\sqrt{u_n+12}=\frac{\left(4-\sqrt{u_n+12}\right)\left(4+\sqrt{u_n+12}\right)}{4+\sqrt{u_n+12}}=\frac{16-u_n-12}{4+\sqrt{u_n+12}}=\frac{1}{4+\sqrt{u_n+12}}\left(4-u_n\right)$

ولدينا : $\frac{1}{4+\sqrt{u_n+12}}\leq\frac{1}{4}$ إذن : $4-u_{n+1}\leq\frac{4-u_n}{4}$

استعمال الطرح أو الترجع في هذا السؤال لا يسمح بالبرهان بسهولة و ذلك لصعوبة التخلص من الجذر مربع ، لذلك استعملنا المرافق

3

نعلم أن: $\forall n\in IN\quad 0<4-u_{n+1}\leq\frac{4-u_n}{4}$ (حسب السؤال السابق) إذن :

$$0<\left(4-u_1\right)\times\left(4-u_2\right)\times\ldots\times\left(4-u_n\right)\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(4-u_0\right)\times\left(4-u_1\right)\times\ldots\times\left(4-u_{n-1}\right)$$

منه :

$$\begin{cases}0<4-u_1\leq\frac{4-u_0}{4}\\ 0<4-u_2\leq\frac{4-u_1}{4}\\ \ldots\leq\ldots\\ \ldots\leq\ldots\\ 0<4-u_n\leq\frac{4-u_{n-1}}{4}\end{cases}$$

منه : $0<4-u_n\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(4-u_0\right)$ منه : $0<4-u_n\leq 7\left(\frac{1}{4}\right)^n$ منه : $4-7\left(\frac{1}{4}\right)^n<u_n\leq 4$

وبما أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}4-7\left(\frac{1}{4}\right)^n=4-0=4$ و $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}4=4$ فإن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=4$

لاحظ أن فكرة حل التمرين تم التطرق إليها في التمرين السابق.

تمرين 3 : $u_0=4\ ;\ u_{n+1}=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}\quad ;\ n\geq 0$

1

لنبين بالترجع أن : $\forall n\in IN\quad u_n>3$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=4$ و $4>3$
- نفترض أن $u_n>3$ ونبين أن $u_{n+1}>3$

لدينا : $u_{n+1}-3=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}-3=\frac{2u_n^2-3-3u_n-6}{u_n+2}=\frac{2u_n^2-3u_n-9}{u_n+2}$

لنعمل الحدودية : $2t^2-3t-9$ ، محددتها هي : $\Delta=3^2-4\times 2\times(-9)=9+72=81$

منه : $t_1=\frac{3+9}{4}=3$ و $t_1=\frac{3-9}{4}=\frac{-3}{2}$

منه : $2t^2-3t-9=2\left(t-t_1\right)\left(t-t_2\right)=2\left(t+\frac{3}{2}\right)(t-3)=(2t+3)(t-3)$

منه : $u_{n+1}-3=\frac{(2u_n+3)(u_n-3)}{u_n+2}$ و لدينا حسب الافتراض : $u_n>3$ أي $u_n-3>0$

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

إذن: $u_{n+1}-3>0$ أي $u_{n+1}>3$ ،، بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\forall n\in IN \quad u_n>3$

2

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}-u_n=\frac{2u_n^2-3-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\frac{u_n^2-2u_n-3}{u_n+2}$

لنعمل الحدودية : t^2-2t-3 ، محددتها هي : $\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16$

منه : $t_1=\frac{2+4}{2}=3$ و $t_2=\frac{2-4}{2}=-1$ منه : $t^2-2t-3=1(t-t_1)(t-t_2)=(t+1)(t-3)$

منه : $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+1)(u_n-3)}{u_n+2}>0$ (لأن : $u_n>3$) بالتالي u_n تزايدية قطعا

لاحظ من خلال هذا السؤال و السؤال السابق أهمية تعميل حدودية من الدرجة الثانية في تحديد إشارة فرق.

3

$$u_{n+1}-3-\frac{9}{5}(u_n-3)=\frac{(2u_n+3)(u_n-3)}{u_n+2}-\frac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\frac{2u_n+3}{u_n+2}-\frac{9}{5}\right)$$

$$u_{n+1}-3-\frac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\frac{10u_n+15-9u_n-18}{5(u_n+2)}\right)$$

$$u_{n+1}-3-\frac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\frac{u_n-3}{5(u_n+2)}\right)=\frac{(u_n-3)^2}{5(u_n+2)}>0$$

بالتالي : $\forall n\in IN \quad u_{n+1}-3>\frac{9}{5}(u_n-3)$

لاحظ أن حساب الفرق و تحديد إشارة يعتبر من بين أهم طرق البرهان في مثل هذه الحالات.

4

لنبين أن : $\forall n\in IN \quad u_n\geq\left(\frac{9}{5}\right)^n+3$

طريقة 1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN \quad u_n\geq\left(\frac{9}{5}\right)^n+3$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن :
- $u_0=4$ و $\left(\frac{9}{5}\right)^0+3=1+3=4$
- نفترض أن $u_n\geq\left(\frac{9}{5}\right)^n+3$ و نبين أن $u_{n+1}\geq\left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}+3$

لدينا $u_n\geq\left(\frac{9}{5}\right)^n+3$ إذن : $u_n-3\geq\left(\frac{9}{5}\right)^n$ أي

$$\frac{9}{5}(u_n-3)\geq\left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}$$

و نعلم أن: $u_{n+1}-3>\frac{9}{5}(u_n-3)$ (حسب السؤال السابق)

إذن : $u_{n+1}\geq\left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}+3$ أي : $u_{n+1}-3\geq\left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}$

طريقة 2

نعلم أن: $u_{n+1}-3>\frac{9}{5}(u_n-3)$ (حسب السؤال السابق)

$$\begin{cases}u_1-3\geq\frac{9}{5}(u_0-3)\\ u_2-3\geq\frac{9}{5}(u_1-3)\\ \ldots\geq\ldots\\ \ldots\geq\ldots\\ u_n-3\geq\frac{9}{5}(u_{n-1}-3)\end{cases}$$ إذن :

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال

نجد أن : $u_n-3\geq\left(\frac{9}{5}\right)^n(u_0-3)$

أي $u_n-3\geq\left(\frac{9}{5}\right)^n$ بالتالي : $u_n\geq\left(\frac{9}{5}\right)^n+3$

يجب الانتباه أثناء استعمال الطريقة الثانية، إذ يجب التحقق أن جميع أطراف المتفاوتات موجبة و أيضا تحديد عدد المتفاوتات لأن هذا العدد يمثل أس القوة $\left(\frac{9}{5}\right)^n$

5

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n=+\infty$ (لأن : $\frac{9}{5}>1$) إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n+3=+\infty$

بالتالي و حسب مصاديق التقارب فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ و هذا يعني أن u_n ليست متقاربة.

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

تمرين 4 : $u_0=1\ ;\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n}+2\right)\quad ;\ n\geq 0$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN\quad 1\leq u_n<4$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=1$ و $1\leq 1<4$
- نفترض أن $1\leq u_n<4$ و نبين أن $1\leq u_{n+1}<4$

$$1\leq u_n<4\ \Rightarrow\ \begin{cases}1\leq u_n<4\\ 1\leq\sqrt{u_n}<2\end{cases}\ \Rightarrow\ 1+1+2\leq u_n+\sqrt{u_n}+2<4+2+2$$

لدينا :

$$\Rightarrow\ 2\leq\frac{u_n+\sqrt{u_n}+2}{2}<4\ \Rightarrow\ 2\leq u_{n+1}<4$$

بالتالي وحسب مبدأ الترجع فإن: $\forall n\in IN\quad 1\leq u_n<4$

2

لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n}+2\right)-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n}+2-2u_n\right)$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(-u_n+\sqrt{u_n}+2\right)=\frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2+\sqrt{u_n}+2\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2+t+2$ ، محددتها هي : $\Delta=1^2-4\times(-1)\times 2=1+8=9$

منه : $t_1=\frac{-1+3}{-2}=-1$ و $t_2=\frac{-1-3}{-2}=2$

منه : $-t^2+t+2=-1(t-t_1)(t-t_2)=-(t+1)(t-2)=(t+1)(2-t)$

منه : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n}+1\right)\left(2-\sqrt{u_n}\right)>0$ (لأن : $\sqrt{u_n}<2$) بالتالي : u_n تزايدية قطعا

سؤال يتطلب التفكير ، لأنه من الصعب التعرف على الحدودية انطلاقا من الشكل $-u_n+\sqrt{u_n}+2$

3

لنبين أن : $\forall n\in IN\quad 0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)$

المتفاوتة $0\leq 4-u_{n+1}$ سبق إثباتها في السؤال الأول ، لدينا :

$$4-u_{n+1}=4-\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n}+2\right)=\frac{1}{2}\left(8-u_n-\sqrt{u_n}-2\right)=\frac{1}{2}\left(6-u_n-\sqrt{u_n}\right)=\frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2-\sqrt{u_n}+6\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2-t+6$ ، محددتها هي : $\Delta=1^2-4\times(-1)\times 6=1+24=25$

منه : $t_1=\frac{1+5}{-2}=-3$ و $t_2=\frac{1-5}{-2}=2$

منه : $-t^2-t+6=-1(t-t_1)(t-t_2)=-(t+3)(t-2)=(t+3)(2-t)$

منه : $4-u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n}+3\right)\left(2-\sqrt{u_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n}+3\right)\times\frac{\left(2-\sqrt{u_n}\right)\left(2+\sqrt{u_n}\right)}{2+\sqrt{u_n}}=\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{u_n}+3\right)\left(4-u_n\right)}{2+\sqrt{u_n}}$

$$\left(4-u_{n+1}\right)-\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)=\left(4-u_n\right)\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{u_n}+3\right)}{2+\sqrt{u_n}}-\frac{2}{3}\right]$$

إذن :

$$\left(4-u_{n+1}\right)-\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)=\left(4-u_n\right)\left[\frac{3\sqrt{u_n}+9-8-4\sqrt{u_n}}{6\left(2+\sqrt{u_n}\right)}\right]=\left(4-u_n\right)\left[\frac{1-\sqrt{u_n}}{6\left(2+\sqrt{u_n}\right)}\right]<0$$

(لأن : $1<\sqrt{u_n}$) بالتالي : $\forall n\in IN\quad 0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)$

سؤال أكثر صعوبة لكونه يتطلب زيادة على التعميل استخراج التعبير $4-u_n$ من خلال استعمال المرافق

4

من أجل حساب النهاية سنؤطر u_n

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

$$\begin{cases} 0<4-u_1<\frac{2}{3}(4-u_0) \\ 0<4-u_2<\frac{2}{3}(4-u_1) \\ \dots<\dots<\dots \\ \dots<\dots<\dots \\ 0<4-u_n<\frac{2}{3}(4-u_{n-1}) \end{cases}$$

نعلم أن: $0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}(4-u_n)$ $\forall n\in IN$ (حسب السؤال السابق) إذن :

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال نجد أن : $0<4-u_n<\left(\frac{2}{3}\right)^n\times(4-u_0)$

منه : $0<4-u_n<3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ منه : $4-3\left(\frac{2}{3}\right)^n<u_n<4$

بما أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}4-2\left(\frac{2}{3}\right)^n=4-0=4$ (لأن : $-1<\frac{2}{3}<1$) و حسب مصاديق التقارب فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=4}$

لاحظ أن فكرة حل السؤال سبق التطرق لها في تمارين سابقة، هذا يعني ضرورة الاستفادة مما سبق.

تمرين 5 : $n\geq 0$; $u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n+1}$; $u_0=3$ ، $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ $\forall n\in IN$

1

لنبين بالترجع أن $u_n>2$ $\forall n\in IN$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=3$ و $3>2$
- نفترض أن $u_n>2$ ونبين أن $u_{n+1}>2$

لدينا : $u_{n+1}-2=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2=\frac{5u_n-4-2u_n-2}{u_n+1}=\frac{3u_n-6}{u_n+1}=\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}>0$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن : $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n>2}$

2

$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-u_n=\frac{5u_n-4-u_n^2-u_n}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n+1}=\frac{-(u_n^2-4u_n+4)}{u_n+1}=\frac{-(u_n-2)^2}{u_n+1}<0$

بالتالي : (u_n) تناقصية.

3

بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 2 فهي متقاربة، لتكن ℓ نهايتها أي $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=\ell$

بما أن : $u_n>2$ $\forall n\in IN$ فإن : $\ell\geq 2$ (لا نستطيع الاستنتاج أن $\ell>2$)

لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث $f(x)=\frac{5x-4}{x+1}$ $\forall n\in IN$

بما أن : f متصلة على $[2;+\infty[$ و $f([2;+\infty[)\subset[2;+\infty[$

(لأن: $f(x)\geq -2 \Rightarrow f(x)-2=\frac{5x-4}{x+1}-2=\frac{5x-4-2x-2}{x+1}=\frac{3x-6}{x+1}=\frac{3(x-2)}{x+1}\geq 0$ $x\geq 2$)

فإن ℓ هو حل المعادلة : $\ell=f(\ell)$ منه : $\ell=\frac{5\ell-4}{\ell+1}$ منه : $\ell^2+\ell=5\ell-4$ منه : $\ell^2-4\ell+4=0$

منه : $(\ell-2)^2=0$ بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=\ell=2}$

لاحظ أن المتفاوتة $\ell\geq 2$ لم تفدنا في هذا السؤال، لكنها تكون ضرورية في حالات مشابهة لكوننا نحصل على أكثر من قيمة للعدد ℓ

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

4	أ)	لدينا : $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4-2u_n-2}{u_n+1}}-\frac{1}{u_n-2}$ $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{3u_n-6}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{3}{3(u_n-2)}=\frac{u_n-2}{3(u_n-2)}=\frac{1}{3}$ إذن v_n متتالية حسابية أساسها : $\boxed{r=\frac{1}{3}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=\frac{1}{u_0-2}=\frac{1}{1}=1}$
	ب)	حسب السؤال السابق لدينا : $v_n=v_0+rn=1+\frac{1}{3}n$ منه : $v_n=\frac{1}{u_n-2}\Rightarrow\frac{1}{v_n}=u_n-2\Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n}+2=\frac{1}{1+\frac{1}{3}n}+2$
5		$\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{3}n}+2=0+2=2}$

رياضيـــات النجـــــــاح أذ سمير لخريسي

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com