Madarisy.com : مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي

Examen de fin du 1er semestre- Mathématiques Février 2020

2 BAC- PC- BIOF –coefficient 7- Durée : 3 h

Exercice n°1 (4,5 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = \dfrac{20u_n}{u_n+1}$ pour tout n de IN

0.5 **1.a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN : $u_n > 19$**

0.75 **b) Vérifier que : $(\forall n \in IN), u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(19-u_n)}{u_n+1}$ puis déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$**

0.5 **c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[19,20]$**

2. On pose pour tout n de IN : $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 19}$

0.75 **a)Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 20$ puis exprimer v_n en fonction de n**

0.75 **b) Montrer que pour tout n de IN : $u_n = \dfrac{19v_n}{v_n - 1}$ puis déduire que $u_n = \dfrac{19\times 20^{n+1}}{20^{n+1}-1}$**

0.5 **c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (justifier votre réponse)**

0.5 **3.a)Montrer que $u_n - 19 < 10^{-25} \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(19\times 10^{25}+1\right)}{\ln 20} - 1$**

0.25 **b) Déduire la valeur du plus petit entier naturel n tel que $u_n - 19 < 10^{-25}$**

Exercice n°2 (4 pts)

0.5 **1.a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E): \dfrac{1}{4}z^2 - \sqrt{3}z + 4 = 0$**

(On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) tel que $\mathrm{Im}(z_1) > 0$)

0.25 **b) Ecrire sous forme trigonométrique la solution z_1 de (E)**

0 . 5 **c)Montrer que z_1^{21} est imaginaire pur**

2.Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,on considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B telles que $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_B = -2 + 2\sqrt{3}i$

0.5 **a)Montrer que l'écriture complexe de la rotation R de centre le point B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est $z' = -iz - 2\left(1+\sqrt{3}\right) + 2\left(\sqrt{3}-1\right)i$**

0.25 **b) Déduire que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R est $z_c = -2\sqrt{3} - 2i$**

3. Soit le point D d'affixe $z_D = 2\sqrt{3} - 6i$

0. 25 **a)Montrer que les points O, B et D sont alignés**

0. 5 **b) Montrer que $\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$**

0.75 **c)Déduire que $AD = AC$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ puis donner la nature du triangle ACD**

0. 5 **4. Montrer que la droite (BD) est la médiatrice du segement $[AC]$**

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي

Examen de fin du 1er semestre- Mathématiques Février 2020

2 BAC- PC- BIOF –coefficient 7- Durée : 3 h

Exercice n°3 (11,5pts)

I. Soit g la fonction numérique définie sur $I=]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-x+1-\ln x$

0.75 **1. a)Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$**

0. 5 **b) Montrer que $(\forall x\in I),\ g'(x)=\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x}$**

0. 5 **2. a) Dresser le tableau de variations de g sur I**

0. 25 **b) Déduire que $(\forall x\in I),\ g(x)>0$**

II. On considère la fonction numérique f définie sur $I=]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{\ln x}{x}-\ln x$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.75 **1. a) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu**

0.75 **b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$**

0.5 **c)Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$**

0.5 **2. a)Dresser le tableau de signes de $(1-x)\ln x$**

0.5 **b) Déduire que $(\forall x\in I),\ f(x)\le x$**

1 **3. a)Montrer que : $(\forall x\in I),\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ puis déduire que f est strictement croissante sur I**

0.5 **b) Montrer que la droite (Δ) est la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1**

0.5 **c)Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$**

1 **d) Construire la droite (Δ) et la courbe (C_f)**

0.25 **4. a-Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur IR**

0.75 **b-Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$**

0.5 **c-Montrer que $f^{-1}\left(\dfrac{2019}{2020}\right)<1$**

5. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge 0}$ définie par : $u_0=\dfrac{20}{19}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

0.5 **a) Montrer que : $u_n>1$ pour tout n de IN**

0.5 **b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge 0}$ est décroissante**

1 **c) Déduire que la suite $(u_n)_{n\ge 0}$ est convergente puis calculer sa limite**

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع