Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

Corrigé de l'exercice 1

On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\tan x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{\tan x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Par suite la fonction f est continue en 0

Corrigé de l'exercice 2

On a $f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}=x+4$ pour tout $x\neq 3$

Donc $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3} x+4=7$

D'où $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Par suite la fonction f est continue en 3

Corrigé de l'exercice 3

On a $f(2)=\dfrac{2(2)+1}{7-3(2)}=5$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{2x+1}{7-3x}=5$

Et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x+3=5$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=f(2)$ alors f est continue en 2

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

Corrigé de l'exercice 4

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\pi(1+h))}{h} \quad \begin{pmatrix} h = x-1 \\ x \to 1 \\ h \to 0 \end{pmatrix} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\pi+\pi h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(\pi h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -\pi \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} \quad \begin{pmatrix} t = \pi h \\ h \to 0 \\ t \to 0 \end{pmatrix} \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

f est continue en $1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow \boxed{m = -\pi}$

Corrigé de l'exercice 5

- On a $\lim_{x\to 0} \frac{\pi \tan(x)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{3} \times \frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$ et la fonction "cos" est continue en $\frac{\pi}{3}$

  Donc $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi \tan(x)}{3x}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

- On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$ et la fonction "sin" est continue en $\frac{\pi}{4}$

  Donc $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي

- On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}=4$ et la fonction "$\sqrt{\ }$"est continue en 4

  Donc $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}=\sqrt{4}=2$

Corrigé de l'exercice 6

$f(x)=x^3+x-1$

1) Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

On a :

- f est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est un polynôme)
- $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=3x^2+1>0\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $0\in f(\mathbb{R})$ (car $f(\mathbb{R})=f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$)

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

2) On a f est continue sur $[0,1]$ et $\left.\begin{matrix}f(0)=-1\\ f(1)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(0)\times f(1)<0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $0<\alpha<1$

3) Etudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

1er cas : si $x\le\alpha$

Alors $f(x)\le f(\alpha)$ (car f est croissante sur $\mathbb{R}$)

Donc $\underline{\underline{f(x)\le 0}}$ (car $f(\alpha)=0$)

2ème cas : si $x\ge\alpha$

Alors $f(x)\ge f(\alpha)$ (car f est croissante sur $\mathbb{R}$)

Donc $\underline{\underline{f(x)\ge 0}}$ (car $f(\alpha)=0$)

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

Corrigé de l'exercice 7

1) Montrons que l'équation $(E):1+\sin x=x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$

Considérons la fonction h définie par : $h(x)=1+\sin(x)-x$

On a :

- h est continue sur $I=\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$
- $\left.\begin{array}{l} h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4-\pi}{2}>0 \\ h\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right)\times h\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0$

2) Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $h(x)=0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$

D'où l'équation $(E):1+\sin x=x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$

Corrigé de l'exercice 8

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

1) On a :

- f est <u>continue</u> sur $I=\mathbb{R}^+$ (car f est une fonction homographique)
- f est dérivable sur $I=\mathbb{R}^+$ et on a $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}>0$

Donc f est <u>strictement croissante</u> sur $I=\mathbb{R}^+$

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l' intervalle $J=f(I)$ vers I

.

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

Tel que : $J = f\left(\mathbb{R}^+\right) = f\left([0,+\infty[\right) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-1,1[$

2) On a :

$$\begin{pmatrix} y = f^{-1}(x) \\ x \in J = [-1,1[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in I = \mathbb{R}^+ \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad xy + x = y - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y - xy = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y(1-x) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{x+1}{1-x}$$

Donc : $\left(\forall x \in [-1,1[\right) \quad f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{1-x}$

Corrigé de l'exercice 9

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]1,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$

1) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}

On a :

- f est continue sur $I =]1,+\infty[$
- f est strictement croissante sur $I =]1,+\infty[$ (car $\left(\forall x \in]1,+\infty[\right) \quad f'(x) = 2(x-1) > 0$)

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l' intervalle $J = f(I)$ vers I .

Tel que : $J = f\left(]1,+\infty[\right) =]-1,+\infty[$

2) On a :

$$\begin{pmatrix} y = f^{-1}(x) \\ x \in]-1,+\infty[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in]1,+\infty[\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y^2 - 2y$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 2y - x = 0$$

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

$\Delta = 4+4x = 4(1+x) > 0 \quad car \quad x > -1$

Donc $y = \dfrac{2-\sqrt{4(1+x)}}{2} = 1-\sqrt{x+1} < 1 \quad ou \quad y = \dfrac{2+\sqrt{4(1+x)}}{2} = 1+\sqrt{1+x} > 1$

Donc $y = 1+\sqrt{1+x}$

D'où $\left(\forall x \in]-1,+\infty[\right) \quad f^{-1}(x) = 1+\sqrt{1+x}$

Corrigé de l'exercice 10

- $A = \dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} = \dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{2^3}}{\sqrt[10]{2^7}} = \dfrac{\sqrt[10]{2^2}\times\sqrt[10]{2^{15}}}{\sqrt[10]{2^7}} = \dfrac{\sqrt[10]{2^{17}}}{\sqrt[10]{2^7}} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

- $B = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2-\sqrt[3]{3}+1}{\left(\sqrt[3]{3}+1\right)\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2-\sqrt[3]{3}+1\right)} = \dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+1} = \dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{4}$

- $C = \dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \dfrac{4^{\frac{1}{3}}.8^{\frac{1}{2}}.\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4^{\frac{1}{3}}.8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}} = 2^{2+\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$

- $D = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3} = \dfrac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}{4-3} = \sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}$

Correction de l'exercice 11

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-x = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = 0$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}+x = +\infty$)

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+2^2\right)}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{(x-8)\left(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\dfrac{1}{12}$

3)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x+6-8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{2x+6}^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4\right)}-\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt[3]{2x+6}^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4}-\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \frac{2}{12}-\frac{1}{4}$$

$$= \frac{-1}{12}$$

4)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-2x+4 = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left[1+\frac{3}{x^2}\right]}-2x+4$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\left[1+\frac{3}{x^2}\right]}-2x+4$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\left[1+\frac{3}{x^2}\right]}-2+\frac{4}{x^2}\right)$$

$$= -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\left[1+\dfrac{3}{x^2}\right]}-2+\dfrac{4}{x^2}\right)=-1 \end{cases}$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\dfrac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^3}{\left(x^2-2\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[4]{\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}=+\infty$

$$\text{Car : } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x+1=2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1=0^+ \end{cases}$$

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

Corrigé de l'exercice 12

On a : $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-12=0$

On pose $x=t^6$, l'équation devient $\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}-12=0 \Leftrightarrow t^3+t^2-12=0$

$\Leftrightarrow$

$(t-2)(t^2+3t+6)=0$

$\Leftrightarrow$

$t-2=0 \quad ou \quad t^2+3t+6=0 \quad (\Delta=-15<0)$

$\Leftrightarrow \quad t=2$

Donc $x=2^6=64$. D'où $S=\{64\}$

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع