R Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

الـــدالة الأسيـــة للأســـاس a

تمـهيـــد :

لتكن $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

نعلم أن الدالة $(x \mapsto \log_a x)$ متصلة ورتيبـة قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن : هي تقابـل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

ومنه فهي تقبل دالة عكسية معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$.

تعريـــف :

الدالة العكسية للدالة $(x \mapsto \log_a x)$ تسمى الدالة الأسيـة للأسـاس a ، ونرمز لها بـــ $(x \mapsto \exp_a(x))$.

استنتـــاج :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp_a(y)$$

ملاحظـة :

(1 $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \exp_a(x) = a^x$

(2 $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x = e^{x \ln a}$

(3 $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad 1^x = 1$

(4 $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x \succ 0$

دراســة الـدالــة $f(x \mapsto a^x)$

1- مجمـوعـة التعريــف :

$$D = \mathbb{R} =]-\infty , +\infty[$$

2- النهـايـــات :

- **الحالـة 1** : $a \succ 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$$

- **الحالـة 2** : $0 \prec a \prec 1$

$$\lim_{+\infty} a^x = 0$$
$$\lim_{-\infty} a^x = +\infty$$

3- التغيـــرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a^x = e^{x \ln a}$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x$

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

Madarisy.com : مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي

ومنه إشارة $\left(a^x\right)'$ هـي إشارة $\ln a$.

ملاحظـة :

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\left(a^x\right)'' = \left(\ln a \cdot a^x\right)'$

$= \ln^2 a \cdot a^x \succ 0$

- **الحالـة 1 :** $a \succ 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

- **الحالـة 2 :** $0 \prec a \prec 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\left(a^x\right)'$	$-$	
a^x	$+\infty$ ↘	0

تـطبيـقــات :

أحسب النهايات التاليــة :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$

نضع : $X = \frac{1}{x}$

$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to 0)$

إذن : $\lim\limits_{X\to 0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e^1 = e$

(2 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$= e^1 = e$

(3 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$

حـدد مشتقــة الدالــة f في الحـالات التاليــة :

Madarisy.com : للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع

R Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

(1 $f(x) = 4^x$

$f(x) = e^{x \ln 4}$

إذن :

$f'(x) = (\ln 4) \cdot e^{x \ln 4}$

$= (\ln 4) \cdot 4^x$

(2 $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

$f(x) = \dfrac{e^{x \ln 2}}{x}$

إذن :

$f'(x) = \dfrac{(\ln 2) \times 2^x \times x - 2^x}{x^2}$

$= \dfrac{(x \ln 2 - 1)\, 2^x}{x^2}$

(3 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$

إذن :

$f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' \cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$

$= \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$

(4 $f(x) = 3^{1-x}$

لدينا :

$f(x) = e^{(1-x) \ln 3}$

إذن :

$f'(x) = ((1-x) \cdot \ln 3)' \cdot 3^{1-x}$

$= -\ln 3 \cdot 3^{1-x}$

(5 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

لدينا :

$f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

إذن :

$f'(x) = \left(x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)' \cdot e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$= \left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + x \cdot \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}}\right) \cdot e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$f'(x) = \left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1 + x}\right) \cdot e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com