مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

الأعداد العقدية

I) عموميات.

1) a) $\mathbb{C}=\{z=a+ib \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ و } i^2=-1\}$

b) كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=a+ib$ حيث a و b من $\mathbb{R}$

و i عنصر من $\mathbb{C}$ يحقق $i^2=-1$ $(i\notin\mathbb{R})$

c) *) الكتابة $z=a+ib$ تسمى الكتابة الجبرية أو الشكل الجبري للعدد z .

*) العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ونكتب $R_e(z)=a$

*) العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ونكتب $\text{Im}(z)=b$

*) إذا كان $b=0$ فإن $z=a\in\mathbb{R}$.

*) إذا كان $a=0$ فإن $z=ib\in\mathbb{R}$ ونقول إن z تخيلي صرف.

2) ليكن a و b و a' و b' من $\mathbb{R}$. و $\alpha\in\mathbb{R}$

$$a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases} \qquad a+ib=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

II) مرافق عدد عقدي.

1) تعريف ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و $b\in\mathbb{R}$

نسمي مرافق العدد z العدد الذي نرمز له ب $\overline{z}$ والمعرف بما يلي $\overline{z}=a-ib$.

2) خاصيات.

a) $\overline{z}=z \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$; $\overline{z}=-z \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

b) $z=z' \Leftrightarrow \overline{z}=\overline{z'}$; $\overline{\overline{z}}=z$

c) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z_1+z_2+....+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+....+\overline{z_n}$

d) $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$; $\overline{z_1z_2....z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot....\overline{z_n}$; $\overline{z^n}=\overline{z}^n \ (n\in\mathbb{Z})$

e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ و $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

f) ليكن $z=x+iy$ لدينا $z+\overline{z}=2x=2R\acute{e}(z)$ و $z-\overline{z}=2iy=2i\,\text{Im}(z)$ و $z\overline{z}=x^2+y^2$

III) معيار عدد عقدي

1) **تعريف:** ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و $b\in\mathbb{R}$

نسمي معيار العدد z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$ والمعرف بما يلي: $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

2) **خاصيات:**

a) إذا كان $z=a\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|a|$

إذا كان $z=ib\in\mathbb{R}$ فإن $|z|=|b|$

b) $|z|=|\overline{z}|=|-z|$ و $|z|^2=z\overline{z}=a^2+b^2$

c) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$ و $|z+z'|\le|z|+|z'|$

d) $|zz'|=|z||z'|$ و $|z^n|=|z|^n$; $|z_1z_2.....z_n|=|z_1||z_2|....|z_n|$

e) $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ و $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

ملاحظة: للحصول على الشكل الجبري لعدد عقدي على شكل كسر نتبع ما يلي:

(*) $\frac{z}{z'}=\frac{z\overline{z'}}{z\overline{z'}}=\frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$

(*) $\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$

IV) التمثيل الهندسي لعدد عقدي.

نفترض أن المستوى P منسوب إلى معلم متقاعد ممنظم $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

1) تعريف:

a) لكل $M(x,y)$ من P العدد $z=a+ib$ يسمى لحق النقطة M ونكتب $aff(M)$.

b) لكل $\vec{u}(x,y)$ من $\vec{v}$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونكتب $aff(\vec{u})=z$

c) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ النقطة $M(x,y)$ تسمى صورة العدد z في P ونكتب $M(z)$.

d) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ المتجهة $\vec{u}(x,y)$ تسمى صورة العدد z في v_2 ونكتب $\vec{u}(z)$.

ملاحظة: a) $aff(o)=0$. $aff(\vec{e}_1)=1$. $aff(\vec{e}_2)=i$

b) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(x'ox)$

$z\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow M(z)\in[ox)$

$z\in\mathbb{R}^-\Leftrightarrow M(z)\in(x'o]$

c) $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow M(z)\in(y'oy)$

$z\in i\mathbb{R}^+\Leftrightarrow M(z)\in[oy)$

$z\in i\mathbb{R}^-\Leftrightarrow M(z)\in(y'o]$

2) خاصيات.

a) $aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M'$

$aff(\overrightarrow{MM'})=aff(M')-aff(M)$

$MM'=|aff(M')-aff(M)|$

b) $aff(\vec{u})=aff(\vec{v})\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v}$

$aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})$

$aff(\alpha\vec{u})=\alpha aff(\vec{u})$

$\|\vec{u}\|=|aff(\vec{u})|$

c) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\beta)\}$ لدينا

$$aff(G)=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha aff(A)+\beta aff(B))$$

d) ليكن I منتصف $[AB]$ $aff(I)=\frac{1}{2}(aff(A)+aff(B))$

e) لتكن A و B و C ثلاث نقط الحاقها على التوالي z_A,z_B,z_C بحيث $A\neq B$ تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

V) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم.

1) *) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $M(z)$ نسمي عمدة العدد z كل قياس للزاوية $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$. ونرمز له $\arg z$

*) $\arg z \equiv \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$

ملاحظة:

$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$
$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$
$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z = k\pi$

$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
$z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$

2) كل عدد z من $\mathbb{C}^*$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $|z| = r$ و $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد z ونكتب $z = [r, \theta]$ أو $z = re^{i\theta}$.

3) ملاحظة: a) $[r,\theta] = [r',\theta'] \Leftrightarrow r = r'$ و $\theta \equiv \theta'[2\pi]$

b) للحصول على الشكل المثلثي للعدد $z = a + ib$ نتبع ما يلي

$$z = a + ib = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta + i\sin\theta) = \left[\sqrt{a^2+b^2}, \theta\right]$$

c)

$\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$
$-\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha)$
$-\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha)$
$\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

4)

$[r,\theta]\cdot[r',\theta'] = [rr', \theta+\theta']$
$[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$
$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta-\theta'\right]$
$\frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
$\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$

$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$
$\arg z^n \equiv n\arg z[2\pi]$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$
$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z[2\pi]$
$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z[2\pi]$

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ $\quad e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

ملاحظة $-1 = e^{i\pi}$ $\quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

5)

$\left(\vec{e_1}, \vec{u}\right) \equiv \arg(aff(\vec{u}))[2\pi]$
$\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \equiv \arg(aff(\vec{v})) - \arg(aff(\vec{u}))[2\pi]$

$\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

ملاحظة:

إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1, \theta]$

$\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Rightarrow AC = AB$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[2\pi]$

6) صيغة Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

7) صيغتا Euler

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \qquad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

ملاحظة: للحصول على الشكل المثلثي لمجموع عددين لهما نفس المعيار هناك طريقتان

الطريقة 1 . نستعمل الصيغ المثلثية .

ليكن $z_1 = e^{i\alpha}$ $\quad z_2 = e^{i\beta}$

$$z_1 + z_2 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\beta + i\sin\beta$$
$$= \cos\alpha + \cos\beta + i(\sin\alpha + \sin\beta)$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$z_1 - z_2 = \cos\alpha - \cos\beta + i(\sin\alpha - \sin\beta)$$
$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + i\,2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

الطريقة 2 . نستعمل الترميز الأسي .

$$z_1 + z_2 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\,2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$z_1 - z_2 = e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\,2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

VI) الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم.

1) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$ نسمي جذر نوني للعدد z كل عدد عقدي Z يحقق $Z^n = z$.

2) حلول المعادلة $z^n = a$ هي الجذور النونية للعدد a.

3) ليكن $Z = [r,\theta]$ من $\mathbb{C}^*$ الجذور النونية للعدد Z هي الأعداد $z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right] / k \in \{0,1,....,n-1\}$ وعددها n

4) الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد $w_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right]$ حيث $k \in \{0,1,...,n-1\}$

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

a) الطريقة المثلثية:

ليكن $Z=[r,\theta]$ من $\mathbb{C}^*$

لنحدد الجذرين المربعين ل Z . $Z=[r,\theta]=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}\right]^2$

إذن جذري Z هما: $u=\left[\sqrt{r},\frac{\theta}{2}\right]$ و $-u$

b) الطريقة الجبرية:

1) إذا كان $\boxed{Z=a\in\mathbb{R}_+^*}$

لدينا: $Z=a=\left(\sqrt{a}\right)^2$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{a}$ و $-u$

2) إذا كان $\boxed{Z=-a\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$Z=-a=i^2\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(i\sqrt{a}\right)^2$

إذن جذري Z هما $u=i\sqrt{a}$ و $-u$

3- إذا كان $\boxed{Z=ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$Z=ib=2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1+i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)\right)^2$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$ و $-u$

4) إذا كان $\boxed{Z=-ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)}$

$Z=-ib=-2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1-i)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)\right)^2$

إذن جذري Z هما $u=\sqrt{\frac{b}{2}}(1-i)$ و $-u$

5) إذا كان $\boxed{Z=a+ib}$ مع $(a\neq 0$ و $b\neq 0)$

مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$Z=-3+4i$

نضع $z=x+iy$ لدينا $z^2=x^2-y^2+2ixy$

و $|z|^2=x^2+y^2$ و $|Z|=5$

$$z^2=Z\Leftrightarrow\begin{cases}z^2=Z\\|z|^2=|Z|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-3 & (1)\\2xy=4 & (2)\\x^2+y^2=5 & (3)\end{cases}$$

من (1) + (3) نستنتج أن $2x^2=2$ يعني $x=1$ أو $x=-1$

ومن (1) − (3) نستنتج أن $2y^2=8$

يعني $y^2=4$

أي $y=2$ أو $y=-2$

ومن خلال (2) لدينا $xy=2>0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة

إذن $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

إذن جذري Z هما $u=1+2i$ و $-u$

VII) المعادلات من الدرجة II:

خاصية:

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

نضع $\Delta=b^2-4ac$

1- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z=-\frac{b}{2a}$.

2- إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

يكون للمعادلة حلان: $z=\frac{-b+u}{2a}$ و $z=\frac{-b-u}{2a}$.

ملاحظات:

*) نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases}z_1+z_2=\frac{-b}{a}\\z_1z_2=\frac{c}{a}\end{cases}$$

*) نعتبر المعادلة $az^2+2b'z+c=0$ مع $a\neq 0$

من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$\Delta'=b'-ac$

1- إذا كان $\boxed{\Delta'=0}$ المعادلة لها حل وحيد $z=-\frac{b'}{a}$

2- إذا كان $\boxed{\Delta'\neq 0}$ المعادلة لها حلان:

$z_1=\frac{-b'+u}{2a}$ و $z_2=\frac{-b'-u}{2a}$. حيث u جذر مربع Δ' .

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com