مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

الهندسَة الفضَائية

1) تذكير :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

❖ لتكن $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$

إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

المسافة AB : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

❖ لتكن $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$

منظم متجهة : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

الجداء السلمي: $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

خاصية : $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

❖ **تمثيل بارامتري لمستقيم:**

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$

$M(x,y,z)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان

$(t\in\mathbb{R})\quad\overrightarrow{AM}=t\vec{u}\Leftrightarrow$

$$(t\in\mathbb{R})\quad\begin{cases}x=x_A+t\alpha\\y=y_A+t\beta\\z=z_A+t\gamma\end{cases}\Leftrightarrow$$

النظمة الأخيرة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

❖ **معادلة ديكارتية لمستوى:**

ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية للمستوى (P)

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$
$$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

خاصية :

إذا كان (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ فإن $\vec{n}(a,b,c)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P).

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

Madarisy.com : مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي

❖ مسافة نقطة عن مستوى :

ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $\Omega(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega)$ نقطة من الفضاء

$$d(\Omega,(P))=\frac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2) الفلكة

أ. تعريف :

لتكن Ω نقطة و r عددا حقيقيا موجبا قطعا

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M=r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها r و نرمز لها بالرمز : $S(\Omega,r)$

ب. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركزها و شعاعها :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها r هي :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

ج . معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة من ألفضاء

$$M\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$$

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

Madarisy.com : مصدر هذا الملف هو موقع مدارسي

د . دراسة E مجموعة النقط التي تحقق: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ تكافئ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

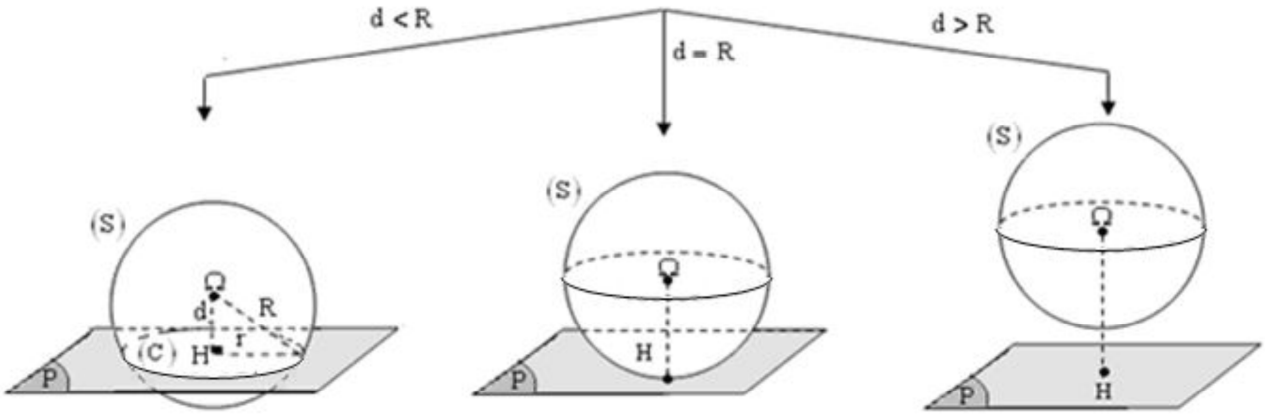
هناك ثلاث حالات :

- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}<0$: E مجموعة فارغة
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}=0$: E هي النقطة الأحادية $\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)\right\}$
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}>0$: E هي الفلكة التي مركزها $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$ وشعاعها $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

3) الأوضاع النسبية لفلكة و مستوى

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d=d(\Omega,(P))$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)



المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)		المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H		المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها H و شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$

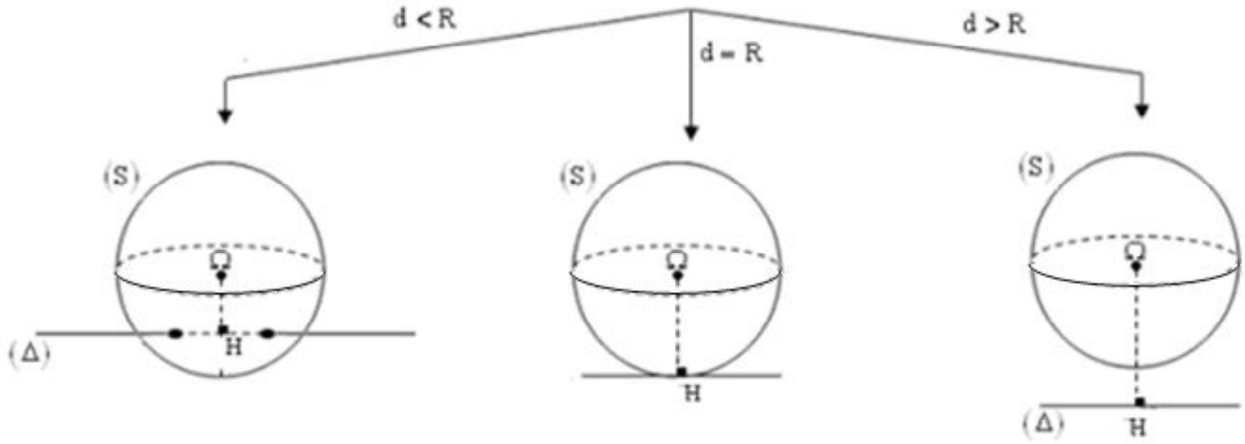
للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

4) الأوضاع النسبية لفلكة و مستقيم :

لتكن (S) **فلكة مركزها** Ω **و شعاعها** R **. نضع** $d = d\left(\Omega,(\Delta)\right)$

لتكن H **المسقط العمودي للمركز** Ω **على المستوى** (Δ)



المستقيم (Δ) **و الفلكة** (S) **لا يتقاطعان**		**المستقيم** (Δ) **مماس للفلكة** (S) **في النقطة** H		**المستقيم** (Δ) **يخترق الفلكة** (S) **في نقطتين مختلفتين**

5) الجداء المتجهي :

أ. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

إذا كان $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ **و** $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

فإن $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

ب. استقامية متجهتين :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ **يكافئ** $\vec{u}$ **و** $\vec{v}$ **مستقيميتان**

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

ج. استقامية ثلاث نقط :

A و B و C مستقيمية يكافئ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

د. معادلة ديكارتية لمستوى :

إذا كان $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية وبالتالي فهي تحدد لنا مستوى (ABC)

و المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ هي متجهة منظمية للمستوى (ABC)

و لدينا : $M\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

و منه نستنتج معادلة المستوى (ABC)

ملاحظة : كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجها بالمتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

ه. مساحة مثلث - مساحة متوازي أضلاع:

مساحة مثلث ABC هي : $S_{ABC}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{2}$

مساحة متوازي الأضلاع هي : $S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

و. مسافة نقطة عن مستقيم :

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة A و موجه بمتجهة $\vec{u}$ هي : $d\left(\Omega,(D)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

ز. توازي و تعامد مستويين :

نعتبر مستويين $(P):ax+by+cz+d=0$ و $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\vec{n}(a,b,c)$ و $\vec{n}'(a',b',c')$ هما متجهتان منظميتان للمستويان (P) و (P')

$(P)//(P')$ يكافئ $\vec{n}\wedge\vec{n}'=\vec{0}$

$(P)\perp(P')$ يكافئ $\vec{n}.\vec{n}'=0$

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com

مصدر هدا الملف هو موقع مدارسي : Madarisy.com

ك. تقاطع مستويين :

إذا كان (P) **و** (P') **متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم موجه بالمتجهة** $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

للحصول على المزيد قم بزيارة الموقع : Madarisy.com